大成高等学校（H29 数学）

（１００点満点　５０分）

１．次の問いに答えなさい。

(1)　$4-3\times(-2)^3\div\frac{2}{3}$ を計算しなさい。

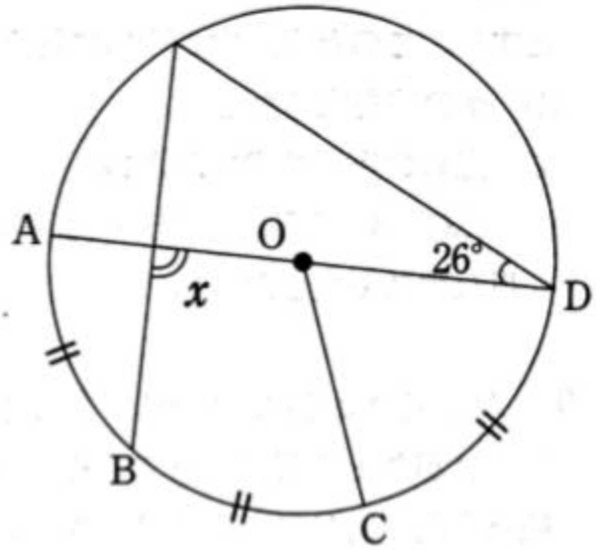
⑵　$(5-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}(\sqrt{48}-\sqrt{27})-\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ を計算しなさい。

⑶　$(x-1)^2-(x+1)^2+x^2$ を因数分解しなさい。

⑷　連立方程式 $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{3}-\dfrac{3x-y}{4}=1 \\ 0.5x+0.2y=1.4 \end{cases}$ を解きなさい。

⑸　２次方程式 $3x^2+3x-1=0$ を解きなさい。

(6) 右の図のように，円周上に４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄがある。ADは円の直径であり，Ｏは円の中心である。
また，弧ADを３等分した点をＢ，Ｃとするとき，$\angle x$ の大きさを求めなさい。



2.

30％の食塩水300ｇと10％の食塩水700ｇを混ぜ合わせてできた食塩水Ａと，20％の食塩水400ｇと10％の食塩水600ｇを混ぜ合わせてできた食塩水Ｂがある。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　食塩水Ａの濃度は何％か求めなさい。

(2)　食塩水Ｂの水を蒸発させて，食塩水Ａと同じ濃度にしたい。何ｇの水を蒸発させればよいか求めなさい。

3.

1から13までの数字を1つずつ書いた13枚のカードがある。その中から同時に3枚引くとき，次の問いに答えなさい。

⑴　引いたカードの中に必ず11が含まれるとき，和がちょうど21となる場合は何通りあるか求めなさい。

⑵　すべてのカードが1桁の数字で，和がちょうど21となる場合は全部で何通りあるか求めなさい。

⑶　和がちょうど21となる場合は全部で何通りあるか求めなさい。

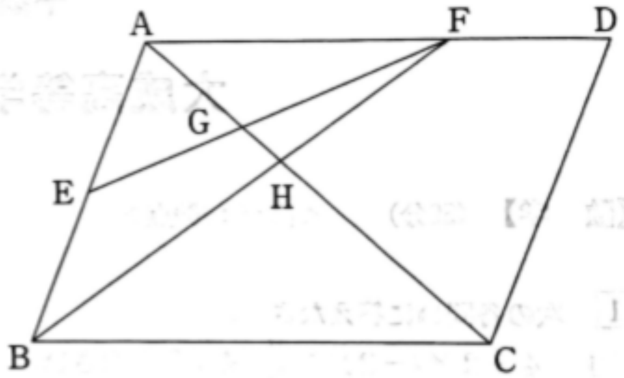
4.

右の図の平行四辺形ABCDにおいて，辺ABの中点をE，AF：FD＝２：１となる点をFとする。線分ACと線分EFの交点をG，線分ACと線分BFの交点をHとするとき，次の比を最も簡単な整数で表しなさい。

(1)　AG：GC

(2)　△AEGと▱ABCDの面積の比

(3)　AC：GH



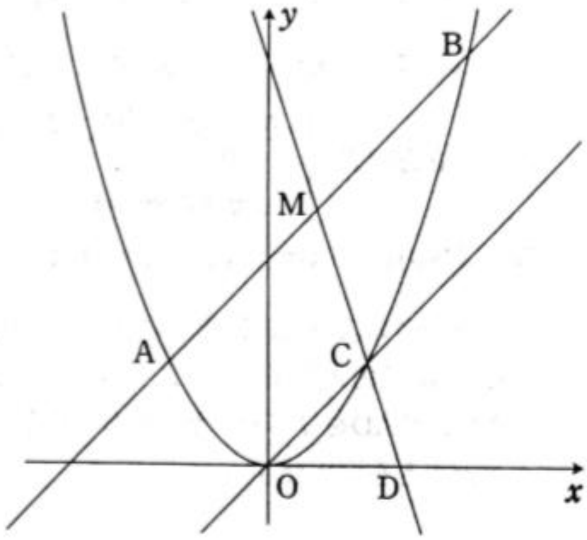
5.

右の図のように，放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=x+4$ がある。この放物線と直線の交点をA，Bとし，それぞれの x 座標は－2，4である。また，原点Oを通り，直線 $y=x+4$ に平行な直線と放物線 $y=ax^2$ の交点をCとする。さらに，線分ABの中点をMとし，2点C，Mを通る直線を ℓ とする。直線 ℓ と x 軸の交点をDとする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) a の値を求めなさい。

(2) 点Cの座標を求めなさい。

(3) △OABの面積と△ABDの面積の比を最も簡単な整数で表しなさい。



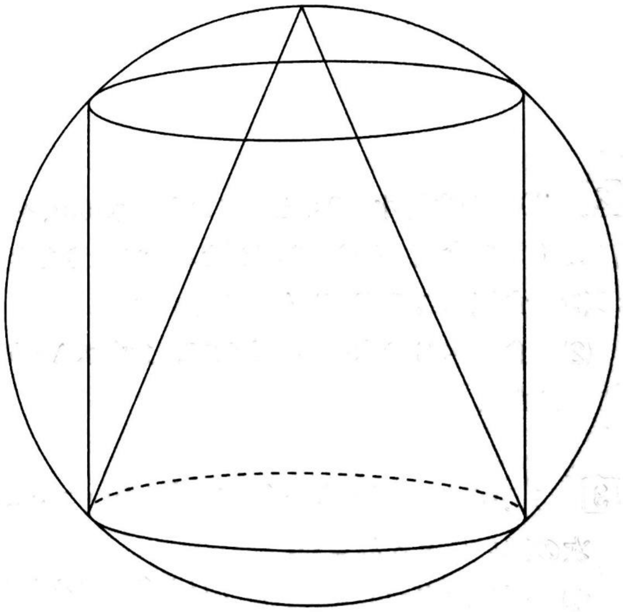
6.

右の図のように，半径$10\sqrt{2}$の球に円柱と円すいがちょうどはいっている。円すいは円柱と底面が同じで，円柱は高さと底面の直径が等しい。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 円柱の底面の半径を求めなさい。

(2) 円すいの高さを求めなさい。

(3) 円柱と円すいの体積の比を求めなさい。



大成高等学校（H29 数学）

（１００点満点　５０分）

１．次の問いに答えなさい。

(1)　$4-3\times(-2)^3\div\dfrac{2}{3}$ を計算しなさい。

$(-2)\times(-2)\times(-2)=-8$

$=4-3\times(-\cancel{8}^{\,4})\times\dfrac{3}{\cancel{2}_{\,1}}$

$=4-(3\times(-4)\times3)$

$=4-(-12\times3)$

$=4-(-36)$

$=4+36=\underline{40}$

$=4+12\times3$

$=4+36$

$=\underline{40}$

でも良いです。

よくあるまちがい

$4-3\times(-4)\times\dfrac{3}{2}$

$=1\times(-4)\times\dfrac{3}{2}$

$=-\cancel{4}^{\,2}\times\dfrac{3}{\cancel{2}_{\,1}}=-6$

×・÷を＋，－よりも優先する。

(2) $(5-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}(\sqrt{48}-\sqrt{27})-\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ を計算しなさい。

$4\sqrt{3}$ $3\sqrt{3}$

簡略化

$\dfrac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

分母の有理化

$=\underbrace{10+5\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3}_{①}-\underbrace{\sqrt{3}(4\sqrt{3}-3\sqrt{3})}_{②}-2\sqrt{3}$

$=7+3\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

$=\boxed{7}+3\sqrt{3}\boxed{-3}-2\sqrt{3}$

$=4+\sqrt{3}$ //

数と√はまとめられないのでここで終了

Point

① √を使った展開計算は、不安なときは、分配法則で構わない。

② ( )の中がまとめられるときは、分配法則より早い。

(3) $(x-1)^2-(x+1)^2+x^2$ を因数分解しなさい。

$= x^2-2x+1-(x^2+2x+1)+x^2$

$= \cancel{x^2}-2x+1-\cancel{x^2}-2x-1+x^2$

$= x^2-4x$

$= x(x-4)$ //

流れ

① 展開して同類項でまとめる。

② 共通因数を（　）の外にくくれるかということを意識。

(4) 連立方程式 $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{3} - \dfrac{3x-y}{4} = 1 & \cdots ① \\ 0.5x + 0.2y = 1.4 & \cdots ② \end{cases}$ を解きなさい。

① × 12

$$12\left(\frac{x+2y}{3} - \frac{3x-y}{4}\right) = 1 \times 12$$

$$4(x+2y) - 3(3x-y) = 12$$

$$4x + 8y - 9x + 3y = 12$$

$$-5x + 11y = 12 \quad \cdots ①'$$

② × 10 $\quad 5x + 2y = 14 \quad \cdots ②'$

①' + ②' より

$$\begin{array}{rl} & -5x + 11y = 12 \quad \cdots ①' \\ +) & 5x + 2y = 14 \quad \cdots ②' \\ \hline & 13y = 26 \end{array}$$

$y = 2$ を ② に代入

$$0.5x + 0.4 = 1.4$$

$$0.5x = 1$$

$$x = 2$$

$$(x, y) = (2, 2)$$

(5) 2次方程式 $3x^2+3x-1=0$ を解きなさい。

$ax^2+bx+c=0$ と比較すると、

$a=3$, $b=3$, $c=-1$

解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

に代入すると、

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{\overbrace{3^2-4\times3\times(-1)}^{9+12=21}}}{2\times3}$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$$

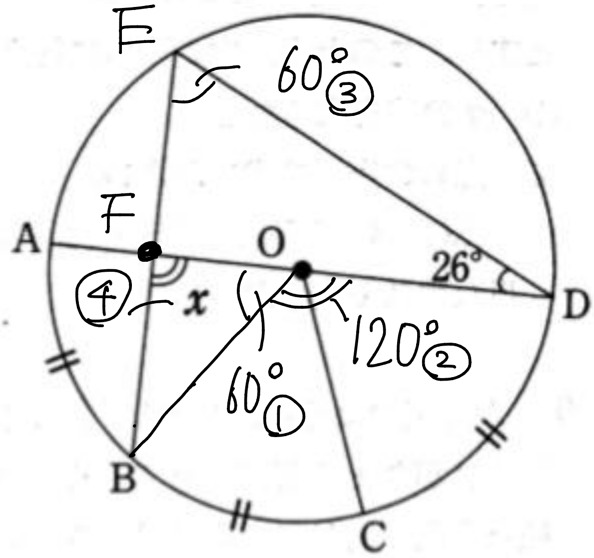
check

片方の項だけ約分してはダメ。

→ 両方同時

$$\cancel{\frac{-\overset{1}{3}\pm\sqrt{21}}{\underset{2}{6}}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}}$$

(6) 右の図のように，円周上に４点Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄがある。ADは円の直径であり，Oは円の中心である。また，弧ADを３等分した点をＢ，Ｃとするとき，∠xの大きさを求めなさい。



① $\overset{\frown}{AD}$に対する中心角

$\angle AOD = 180°$

B, Cによって中心角は三等分されるので

$180 \div 3 = 60°$

$= \angle AOB$

② 一直線は180°より

$\angle BOD = 180° - \angle AOB$

$= 180° - 60°$

$= 120°$

③ ∠BEDは$\overset{\frown}{BD}$の円周角であり中心角∠BODの半分である。（円周角の定理）よって，

$\angle BED = 60°$

④ ゴール

△EFDの外角である∠xは外角の性質より

$\angle x = \angle FED + \angle EDF$

$= 60° + 26°$

$= 86°$ //

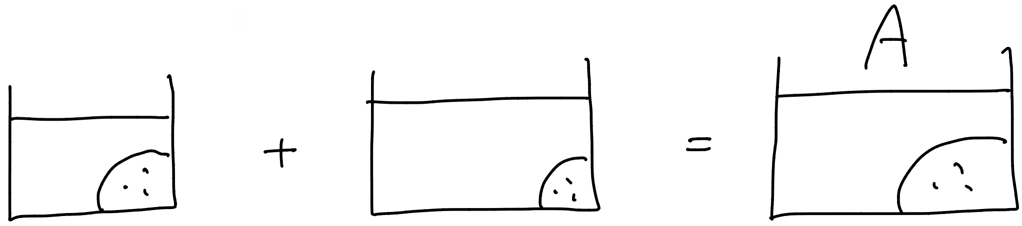
2.

30％の食塩水300ｇと10％の食塩水700ｇを混ぜ合わせてできた食塩水Ａと，20％の食塩水400ｇと10％の食塩水600ｇを混ぜ合わせてできた食塩水Ｂがある。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　食塩水Ａの濃度は何％か求めなさい。

(2)　食塩水Ｂの水を蒸発させて，食塩水Ａと同じ濃度にしたい。何ｇの水を蒸発させればよいか求めなさい。

(1)



濃度	30%	10%	x %
食塩水	300g	700g	1000g

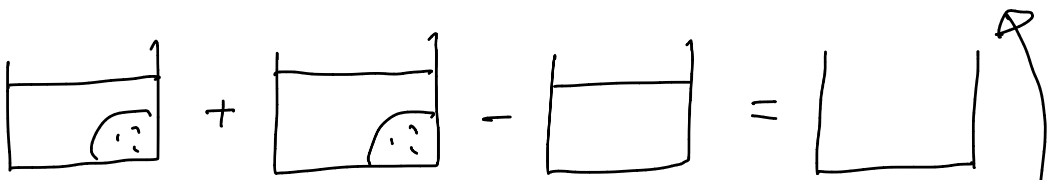
食塩　$300 \times \frac{30}{100} + 700 \times \frac{10}{100} = 1000 \times \frac{x}{100}$

食塩の量に関する方程式↑を解くと。

$90 + 70 = 10x \qquad x = 16 \qquad \underline{16\%}$

---

(2)



水の蒸発なので濃度は0%

20%	10%	0%	16%
400g	600g	y g	$1000-y$ (g)

食塩　$400 \times \frac{20}{100} + 600 \times \frac{10}{100} = (1000-y) \times \frac{16}{100}$

$80 + 60 = 160 - \frac{16y}{100} \qquad y = 125$

$\frac{16y}{100} = 20 \qquad 16y = 2000 \qquad \underline{125g}$

3.

1から13までの数字を1つずつ書いた13枚のカードがある。その中から同時に3枚引くとき，次の問いに答えなさい。

(1) 引いたカードの中に必ず11が含まれるとき，和がちょうど21となる場合は何通りあるか求めなさい。

(2) すべてのカードが1桁の数字で，和がちょうど21となる場合は全部で何通りあるか求めなさい。

(3) 和がちょうど21となる場合は全部で何通りあるか求めなさい。

(1) のこりの2枚を x, y とすると $x+y=10$ となる。

$(x, y) = (9, 1)(8, 2)(7, 3)(6, 4)$

1番大きい数から順に考えるとわかりやすい。

3枚のカードに区別がないので この4通りが答。

((1, 9)とか考えなくてよいということ。)

---

(2) 3枚のカードを x, y, z とすると $x+y+z=21$

$(x, y, z) = (9, 8, 7), (9, 7, 5), (8, 7, 6)$

の3通り

---

(3) ・1枚が13の場合 他の2枚は (7, 1)(6, 2)(5, 3) 3通り

・12 (8, 1)(7, 2)(6, 3)(5, 4) 4通り

・11 (1)の4通り

・10 (9, 2)(8, 3)(7, 4)(6, 5) 4通り

・9, 8, ⋮ } 3枚とも1けたになり(2)のこと。 よって3通り

全て足すと，

$3+4+4+4+3=18$通り

Point
場合分け

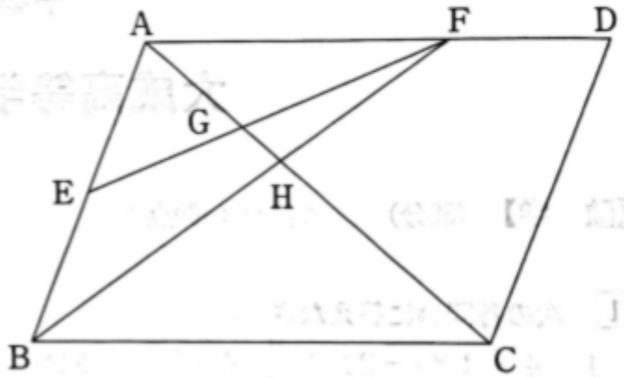
4.

右の図の平行四辺形ABCDにおいて，辺ABの中点をE，AF：FD＝２：１ となる点をFとする。線分ACと線分EFの交点をG，線分ACと線分BFの交点をHとするとき，次の比を最も簡単な整数で表しなさい。

(1) AG：GC

(2) △AEGと▱ABCDの面積の比

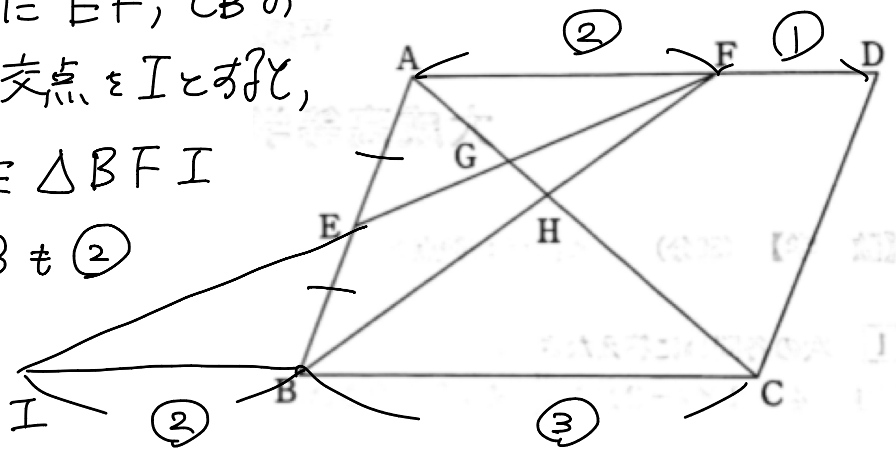
(3) AC：GH

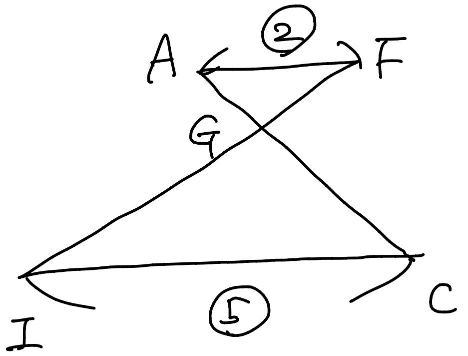


(1) 右図のように EF，CB の延長線の交点を I とすると，

△AEF ≡ △BFI

となり IB も ② となる。





BC = AF + FD

= ② + ①

= ③ なので

IC = IB + BC

= ② + ③

= ⑤

△AFG ∽ △CIG

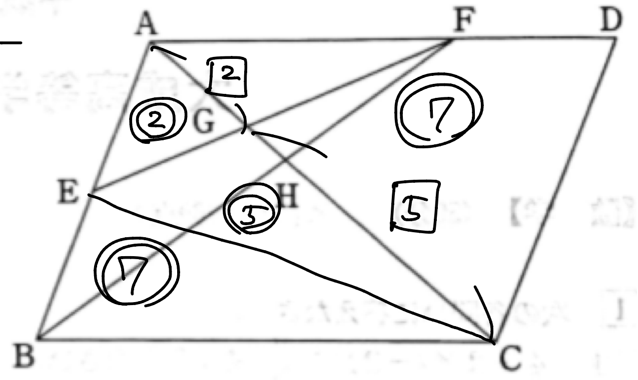
より相似な図形の辺の比は 2：5 でどこも等しいので

AG：GC ＝ 2：5

Point

求める辺が含まれた三角形を見つけたり作図して対応する。

(2) △AEG：▱ABCD



① ECを結ぶと、

△AEGと△GEC

は高さの等しい三角形

になるので面積比

は底辺比と等しく

なる。

よって △AEG：△GEC

＝ ②：⑤

② Eは ABの中点なので

AE＝EB から

△AEC＝△EBC となり

△EBC＝②＋⑤＝⑦

③ 対角線ACは

▱ABCDを

二等分するので

△CDA＝△ABC

＝⑭

④ ▱ABCD＝△ABC＋△CDA

＝⑭＋⑭＝㉘

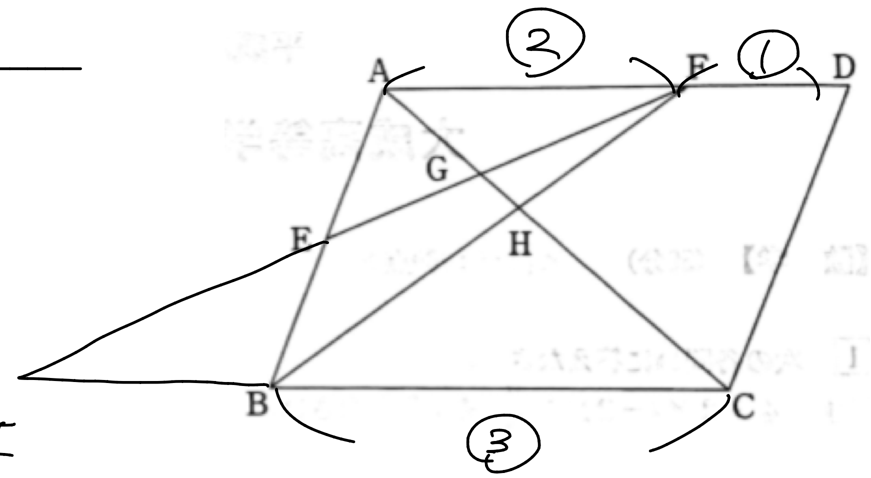
以上より

△AEG：▱ABCD

＝2：28 ＝1：14

(3) AC：GH

重なる辺の比は
細かく分けた比
を求める。



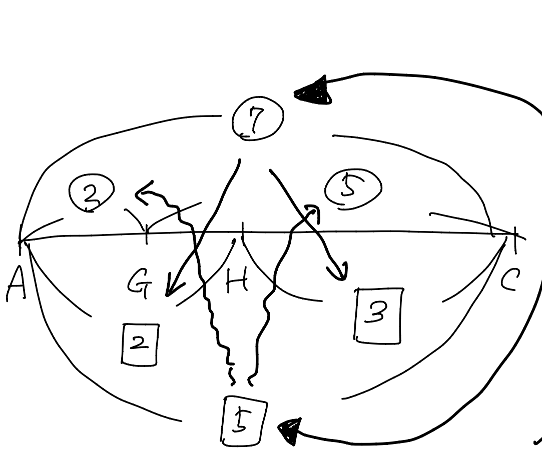
今回だと、

AG：GH：HC を求めることを目指す。

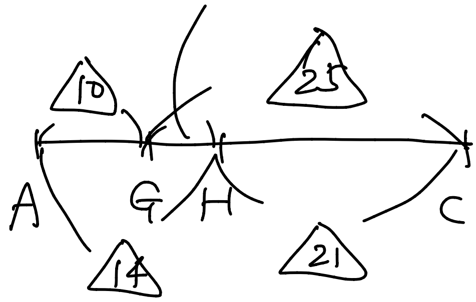
① △AGF∽△CGI
より AG：GC … (1)のこと。 2：5

② △AHF∽△CHB
から AH：CH = AF：CB
= 2：3

14 − 10
= 4 となる。



和をそれぞれにかけると比が統一される。



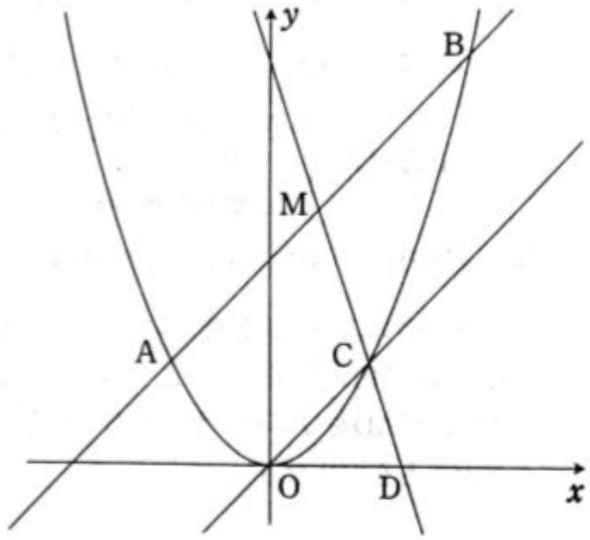
よってAC：GH = 35：4

右の図のように，放物線 $y = ax^2$ と直線 $y = x + 4$ がある。この放物線と直線の交点をA，Bとし，それぞれの x 座標は -2，4である。また，原点Oを通り，直線 $y = x + 4$ に平行な直線と放物線 $y = ax^2$ の交点をCとする。さらに，線分ABの中点をMとし，2点C，Mを通る直線を ℓ とする。直線 ℓ と x 軸の交点をDとする。このとき，次の問いに答えなさい。

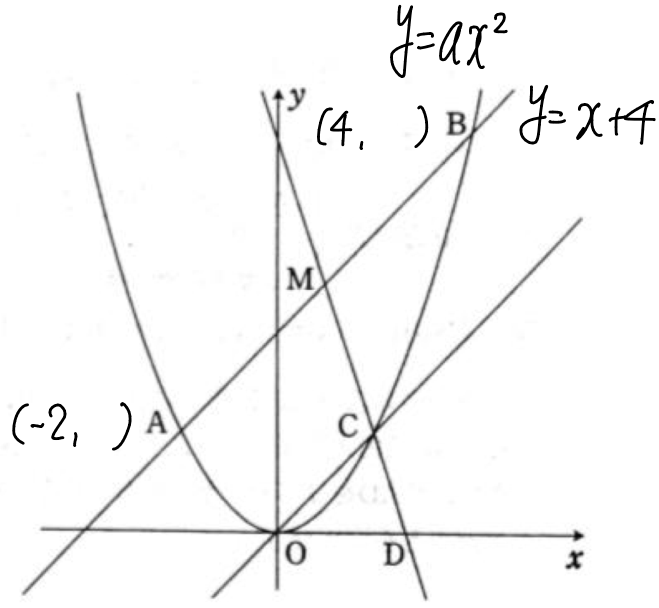
(1) a の値を求めなさい。

(2) 点Cの座標を求めなさい。

(3) △OABの面積と△ABDの面積の比を最も簡単な整数で表しなさい。



(1) a を求めるには，$y=ax^2$ が通る点を見つけ，↑の式に代入することで求められる。



AとBは $y=x+4$ 上の点なので $x=-2, 4$ を代入すると，

A… $y=-2+4=2$

よって $A(-2, 2)$

B… $y=4+4=8$

よって $B(4, 8)$

どちらでもよいので $y=ax^2$ に代入。

$2=a\times(-2)^2$

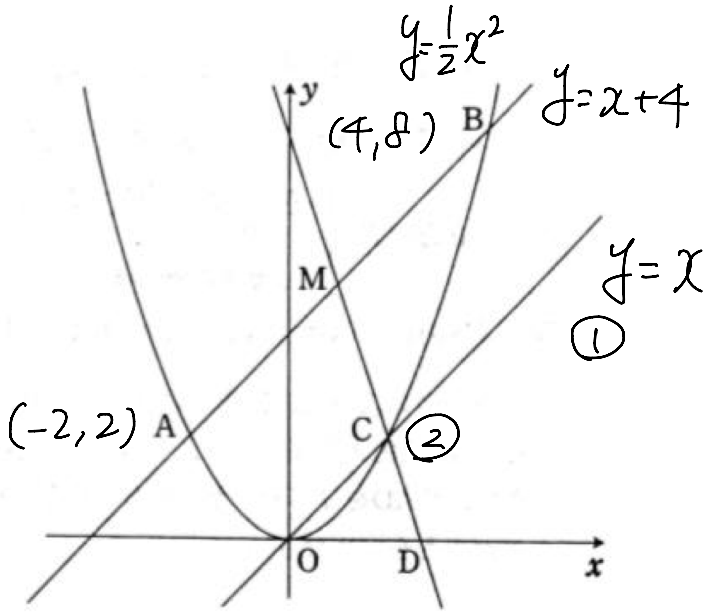
$2=4a$

$\frac{2}{4}=a$ → $a=\frac{1}{2}$

(2)

Cの座標を求める流れ

直線OCのグラフの式を求め①，$y=\frac{1}{2}x^2$ との交点を求める。②



① OCはAB：$y=x+4$ と平行で原点を通るので傾きが等しく1で切片が0（原点）である。

よって $y=x$

② $\begin{cases} y=x \\ y=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$ 代入

$x=\frac{1}{2}x^2$ ×2

$2x=x^2$

$x^2-2x=0$

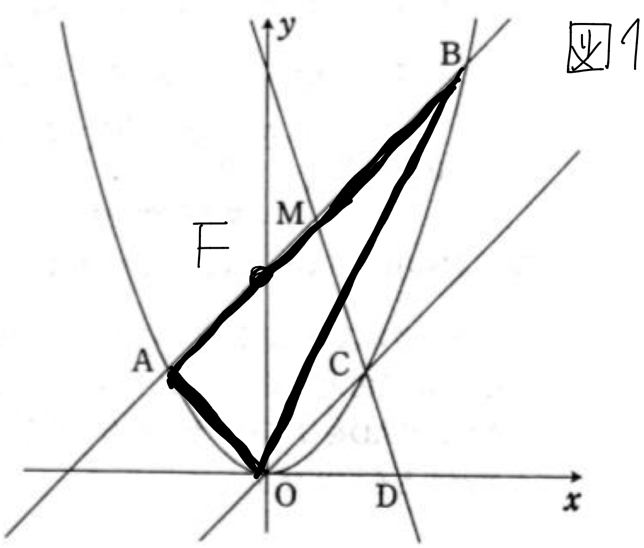
$x(x-2)=0$

$x=0,\ 2$

Cのx座標 >0 なので $x=2$ であり $y=x$ に代入すると $y=4$

よって $C(2,2)$ //

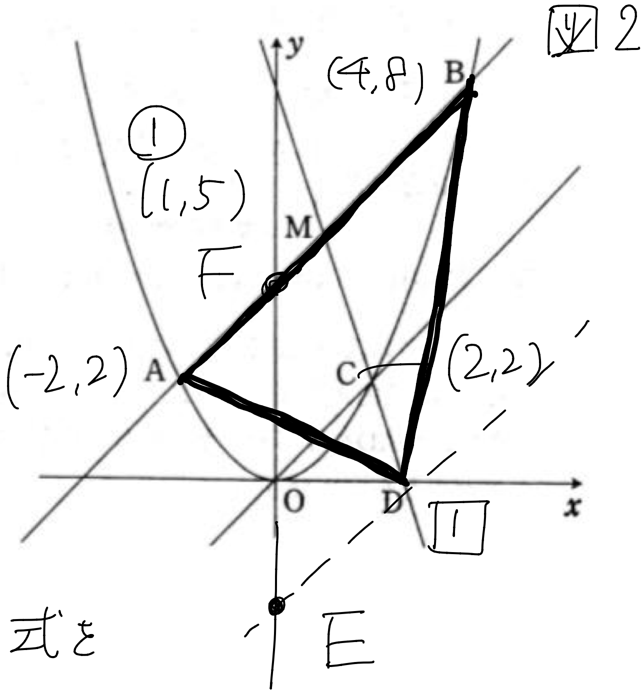
(3) △OAB：△ABD の最も簡単な比



流れ

図2の△ABDの頂点Dを ABに平行に移動させ，y軸との交点を Eとすると、△ABD＝△ABE となる。

△OABと△ABE の高さの比を考えると FO：FE この高さの比が面積比となる。



1 Dの座標は MCの式を求めることで求められる。

① Mは ABの中点なので

$M\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{2+8}{2}\right)$

$= M(1, 5)$

② Cは(2)より (2, 2)

(1, 5) (2, 2) より

傾きは $\frac{2-5}{2-1} = -3$

$y=-3x+b$ となり (2, 2) を通るので $b=8$

$y = -3x+8$

$y=0$ を代入すると x軸上の座標が求まる。 $0=-3x+8$ $x=\frac{8}{3}$

$D\left(\frac{8}{3}, 0\right)$

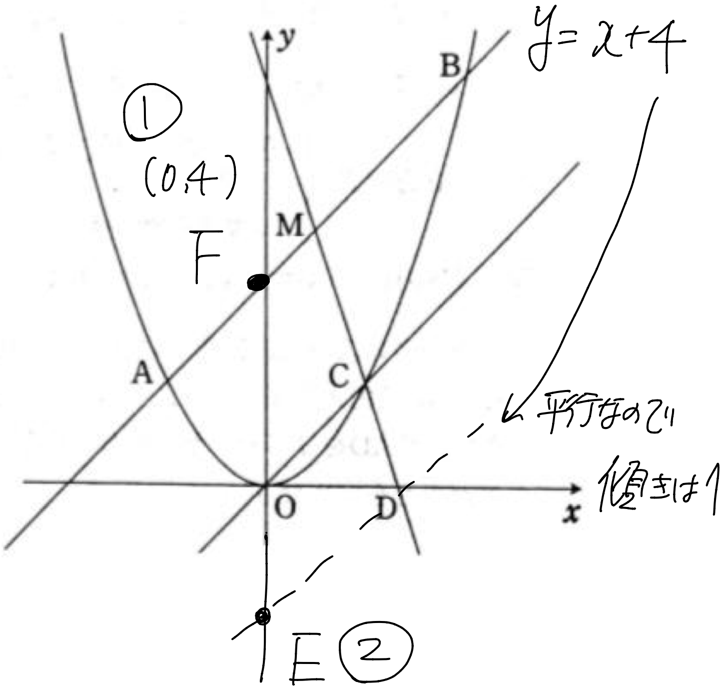
(3) 続き

① Fは $y=x+4$ の y軸上の点 つまり 切片と同じなので

$F(0,4)$

② $D\left(\frac{8}{3},0\right)$ と DE の傾きが 1 であることから

$E\left(0,-\frac{8}{3}\right)$ とわかる。



今までのことより

$\triangle OAB : \triangle ABD$

$= \triangle OAB : \triangle ABE$

$= FO : FE$

$= 4 : 4+\frac{8}{3}$

$= 4 : \frac{20}{3}$ ×3

$= 12 : 20$ ÷4

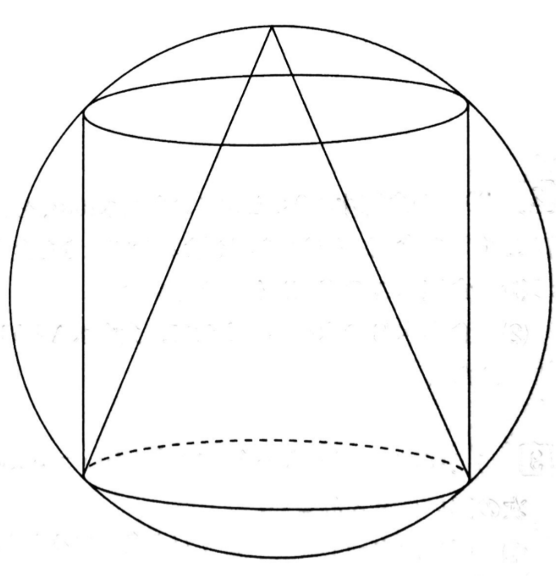
$= 3 : 5$

6 右の図のように，半径$10\sqrt{2}$の球に円柱と円すいがちょうどはいっている。円すいは円柱と底面が同じで，円柱は高さと底面の直径が等しい。このとき，次の問いに答えなさい。

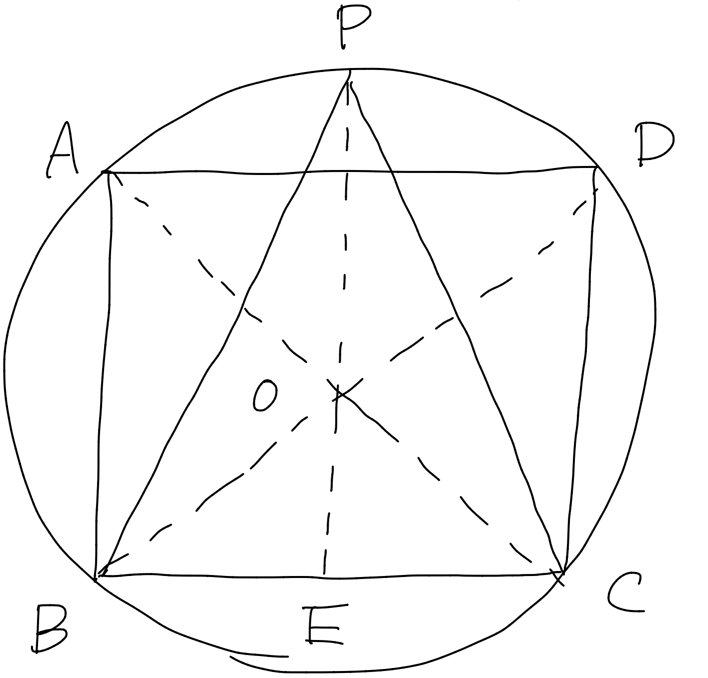
(1) 円柱の底面の半径を求めなさい。

(2) 円すいの高さを求めなさい。

(3) 円柱と円すいの体積の比を求めなさい。



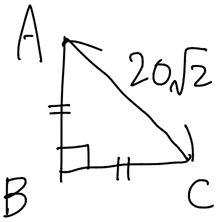
(1) 円錐の頂点と球の中心を通る切断面（平面）で考える。



$OA = 球の半径 = 10\sqrt{2}$

$AC = 直径 = 10\sqrt{2} \times 2$

$= 20\sqrt{2}$



$1:1:\sqrt{2}$の三角形なので

$BC = 20$

$底面の半径 = BC \times \frac{1}{2}$

$= 20 \times \frac{1}{2} = 10$ //

---

(2) 求める円錐の高さは

$PE = PO + OE$

POは球の半径なので$10\sqrt{2}$

OEを△OEBでの三平方の定理で求める。

$OB^2 = OE^2 + \underbrace{BE^2}_{(1)}$

$(10\sqrt{2})^2 = OE^2 + 10^2$

$200 = OE^2 + 100$

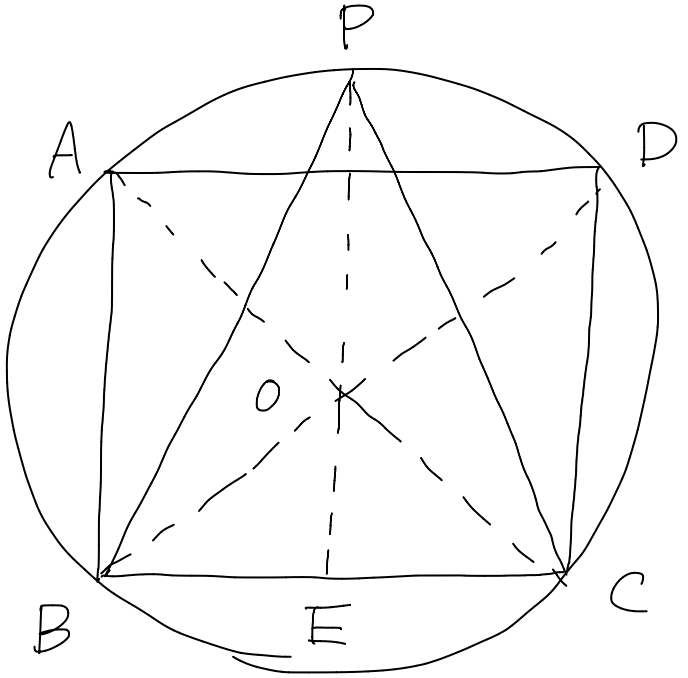
$OE^2 = 100$

$OE = 10$

よって $PE = PO + OE$ より

高さは，$10\sqrt{2} + 10$ //

(3) 円柱と円錐の体積比



・円柱 = 底面積×高さ

$= $ 底面の円の面積×高さ

$= BE \times BE \times \pi \times AB$

(1)

$= \boxed{10 \times 10 \times \pi \times 20}$

問題文より
底面の直径BCと高さABは等しい

・円錐

$= BE \times BE \times \pi \times PE \times \frac{1}{3}$

$= \boxed{10 \times 10 \times \pi \times (10\sqrt{2}+10) \times \frac{1}{3}}$

Point
それぞれの体積を計算してから比を求めるよりも，同じ項が互いにあることから割る計算の方が早い

比の計算をすると

同じ項は割る。

$\cancel{10^2\pi} \times 20 : \cancel{10^2\pi} \times (10\sqrt{2}+10) \times \frac{1}{3}$

$20 : \frac{10\sqrt{2}+10}{3} \underset{\times 3}{=} 60 : 10\sqrt{2}+10 \underset{\div 10}{=} \underline{6 : \sqrt{2}+1}$ //