(相山女学園)高等学校　　H(27)数学

（１００点満点　（ 50 ）分）

１．次の問いに答えなさい。

(1) $2a^3b \div \left(-\dfrac{8}{3}a^4b^4\right) \times (-3b)$ を計算せよ。

(2) $(x+2)^2-2(x+2)-3$ を因数分解せよ。

(3) 2次方程式 $x^2+3x-5=0$ の2つの解を α，β とするとき，$\alpha+\beta$ の値を求めよ。

(4) 半径6cmの球を，球の中心から2cmの距離にある平面で切ったときの切り口の面積を求めよ。
ただし，円周率は π とする。

(5) 1個のさいころを投げ，偶数の目が出ればその目の数を得点として加え，奇数の目が出ると今まで取っていた得点はすべてなくなり，0点になるというゲームを行う。
0点から始め，さいころを2回投げ終わったとき，得点が4点になる確率を求めよ。

2.

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{8}}+\dfrac{5}{\sqrt{32}}$を計算し，分母を有理化して答えよ。

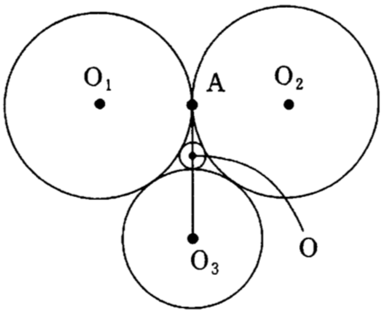
(2) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$の分母を有理化することを考えるとき，以下の空欄$\boxed{\ B\ }$にあてはまる値を答えよ。

ただし，$\boxed{\ A\ }$はすべて同じ値である。

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\times(\boxed{\ A\ })}{\sqrt{5}+\sqrt{2}(\boxed{\ A\ })}=\frac{\sqrt{5}\times(\boxed{\ A\ })}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{5}\times(\boxed{\ A\ })}{5-2}=\boxed{\ B\ }$$

3.

図のように互いに接している4つの円O，O_1，O_2，O_3がある。円O_1，O_2，O_3の半径はそれぞれ6，6，4である。円Oの半径をr，円O_1と円O_2との接点をAとするとき，次の問いに答えよ。



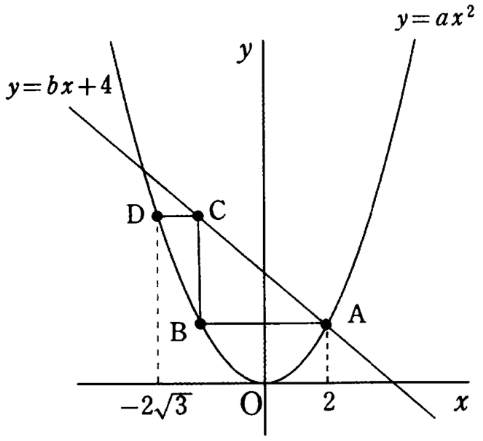
(1) 線分AO_3の長さを求めよ。

(2) 線分AOの長さをrを用いて表せ。

(3) rの値を求めよ。

4.

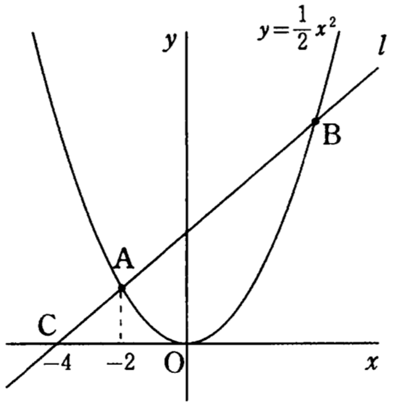
図のように放物線 $y=ax^2 (a>0)$ と，放物線上の点Aを通る直線 $y=bx+4$ $(b<0)$ がある。また，線分AB，CDは x 軸に平行であり，線分BCは y 軸に平行である。点A，Dの x 座標がそれぞれ2，$-2\sqrt{3}$ であるとき，a，b の値をそれぞれ求めよ。



5.

図のように，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 l が 2 点 A，B で交わり，点 A の x 座標は -2 である。直線 l と x 軸との交点を C とすると，点 C の x 座標は -4 である。

このとき次の問いに答えよ。ただし，円周率は π とする。



(1) 直線 l の式を求めよ。

(2) 点 B の座標を求めよ。

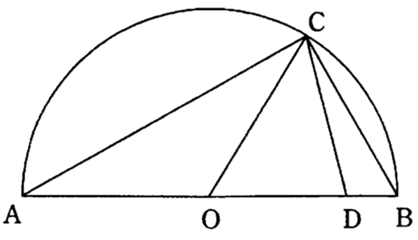
(3) 4 点 O，A，B，D をこの順に結んでできる四角形 OABD が平行四辺形になるような点 D の座標を求めよ。

(4) △ACO を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

６.

図は，点 O を中心とする半径 1 の半円で，線分 AB は直径である。また，点 C は円周上の点で CB = 1 であり，点 D は線分 AB 上の点で，AC = AD である。次の問いに答えよ。

(1) ∠ODC の大きさを求めよ。
(2) 線分 OD の長さを求めよ。



7.

1から30までの数字が1つずつ書かれた30枚のカードがある。表，裏の区別がつくものとし，すべてのカードを表が上を向いている状態で並べる。この状態から，2の倍数のすべてのカードをひっくり返す。そこから続けて3の倍数のすべてのカード，4の倍数のすべてのカード，…というように，nの倍数のすべてのカードまで順にひっくり返す。このとき次の問いに答えよ。
※例えば$n = 3$のとき，6と書かれたカードは2回ひっくり返されて表が上を向いていることになる。

(1) $n=3$のとき，裏が上を向いているカードは何枚あるか。
(2) $n=24$のとき，24と書かれたカードは何回ひっくり返されたか。
(3) $n=30$のとき，1回だけひっくり返されて裏が上を向いているカードは何枚あるか。

(椙山女学園)高等学校　　H(27)数学

（１００点満点　（ 50 ）分）

１．次の問いに答えなさい。

(1) $2a^3b \div \left(-\dfrac{8}{3}a^4b^4\right) \times (-3b)$ を計算せよ。

$= 2a^3b \times \dfrac{3}{-8a^4b^4} \times (-3b)$

$= \dfrac{9}{4ab^2}$ //

(2) $(x+2)^2-2(x+2)-3$ を因数分解せよ。

$x+2=M$ とおくと M^2-2M-3

$=(M-3)(M+1)$

$M=x+2$ を戻すと

$=(x+2-3)(x+2+1)$

$=(x-1)(x+3)$ //

(3) 2次方程式 $x^2+3x-5=0$ の2つの解を α，β とするとき，$\alpha+\beta$ の値を求めよ。

$(x-\alpha)(x-\beta)$

$=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

x^2+3x-5 と

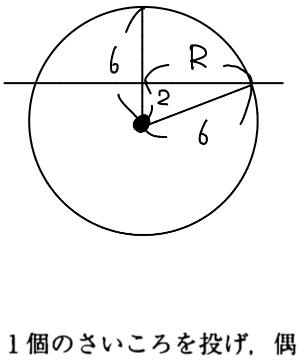
係数を比較すると

$-(\alpha+\beta)=3$

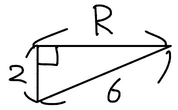
$\alpha\beta=-5$

よって $\alpha+\beta=-3$ //

(4) 半径6cmの球を，球の中心から2cmの距離にある平面で切ったときの切り口の面積を求めよ。
ただし，円周率は π とする。



切り口の半径Rは直角三角形



$R^2+2^2=6^2$

$R^2=36-4$

$=32$

$R=4\sqrt{2}$

よって切り口の円の面積は

$(4\sqrt{2})^2\pi = 32\pi$ (cm²) //

(5) 1個のさいころを投げ，偶数の目が出ればその目の数を得点として加え，奇数の目が出ると今まで取っていた得点はすべてなくなり，0点になるというゲームを行う。
0点から始め，さいころを2回投げ終わったとき，得点が4点になる確率を求めよ。

(1回目, 2回目)=(偶数，偶数) のとき　(2, 2) の1通り

(奇数，偶数) のとき　(1, 4) (3, 4) (5, 4) の3通り

以上より $\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$ //

2.

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{8}}+\frac{5}{\sqrt{32}}$を計算し，分母を有理化して答えよ。

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{5}{4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\frac{3\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\frac{5\times\sqrt{2}}{4\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}+\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}+6\sqrt{2}+5\sqrt{2}}{8}=\frac{15\sqrt{2}}{8} \text{ //}$$

(2) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$の分母を有理化することを考えるとき，以下の空欄 $\boxed{B}$ にあてはまる値を答えよ。

ただし，$\boxed{A}$ はすべて同じ値である。

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\times(\boxed{A})}{\sqrt{5}+\sqrt{2}(\boxed{A})}=\frac{\sqrt{5}\times(\boxed{A})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{5}\times(\boxed{A})}{5-2}=\boxed{B}$$

$$=\frac{\sqrt{5}\times(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}=\frac{5-\sqrt{10}}{3}$$

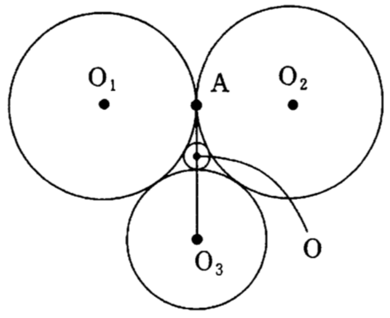
Point

分母が多項式のとき
符号をかえた式
を分母・分子にかける
ことで分母の有理化
ができる。

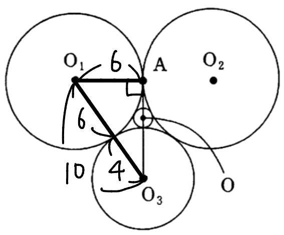
3.

図のように互いに接している4つの円O, O_1, O_2, O_3がある。円O_1, O_2, O_3の半径はそれぞれ6, 6, 4である。円Oの半径をr, 円O_1と円O_2との接点をAとするとき，次の問いに答えよ。

(1) 線分AO_3の長さを求めよ。
(2) 線分AOの長さをrを用いて表せ。
(3) rの値を求めよ。



(1)



三平方の定理より

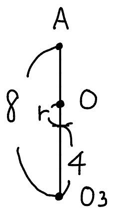
$O_1O_3{}^2 = O_1A^2 + AO_3{}^2$

$10^2 = 6^2 + AO_3{}^2$

$64 = AO_3{}^2$

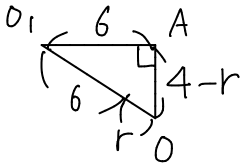
$AO_3 = 8$ //

(2)



$AO = 8-(4+r)$

$= 4-r$



三平方の定理より

$OO_1{}^2 = O_1A^2 + AO^2$

$(6+r)^2 = 6^2 + AO^2$

$\cancel{36} + 12r + r^2 = \cancel{36} + AO^2$

よって $AO = \sqrt{r^2+12r}$ //

(3) $OO_1{}^2 = O_1A^2 + AO^2$

$(6+r)^2 = 6^2 + (4-r)^2$

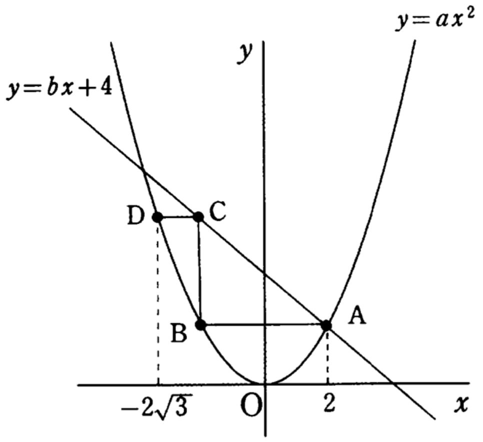
$36 + 12r + r^2 = 36 + 16 - 8r + r^2$

$20r = 16$

$r = \frac{4}{5}$ //

4.

図のように放物線 $y=ax^2(a>0)$ と，放物線上の点Aを通る直線 $y=bx+4$ $(b<0)$ がある。また，線分AB，CDは x 軸に平行であり，線分BCは y 軸に平行である。点A，Dの x 座標がそれぞれ2，$-2\sqrt{3}$ であるとき，a，b の値をそれぞれ求めよ。



a と b の値を求めるため，
2つの式を作ることを目指す。

1 Aは $y=ax^2$，$y=bx+4$ の y の値が等しいことから等式を作る。

x の値が2なので

$$\left.\begin{array}{l} y=a\times 2^2 \\ y=b\times 2+4 \end{array}\right\} \boxed{4a=2b+4} \cdots ①$$

2 C，Dは y 座標が等しいことから等式を作る。

- Dの x 座標が $-2\sqrt{3}$ なので $y=ax^2$ に代入
  $y=a\times(-2\sqrt{3})^2=12a$
- Cは y 座標がDと等しく $x=-2$ なので
  $y=bx+4$，$x=-2$

$$\boxed{12a=-2b+4} \cdots ②$$

$$\begin{array}{rl} & 4a=2b+4 \\ +) & 12a=-2b+4 \\ \hline & 16a=8 \end{array}$$

$a=\frac{1}{2}$

代入

$4\times\frac{1}{2}=2b+4$

$-2=2b$

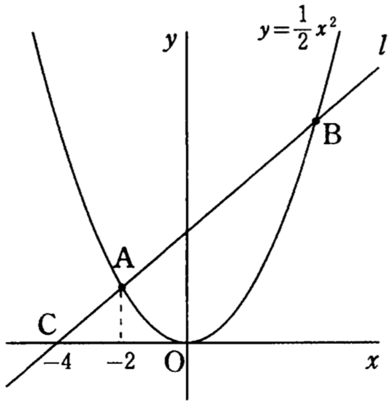
$-1=b$

$(a,b)=(\frac{1}{2},-1)$ //

5.

図のように，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 l が2点A，Bで交わり，点Aの x 座標は -2 である。直線 l と x 軸との交点をCとすると，点Cの x 座標は -4 である。
このとき次の問いに答えよ。ただし，円周率は π とする。

(1) 直線 l の式を求めよ。
(2) 点Bの座標を求めよ。
(3) 4点O，A，B，Dをこの順に結んでできる四角形OABDが平行四辺形になるような点Dの座標を求めよ。
(4) △ACOを y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ。



(1) 直線は2点の座標がわかればよい。つまりAとC。

$A(-2,2)$　$C(-4,0)$ なので傾き $=\dfrac{0-2}{-4-(-2)}=1$

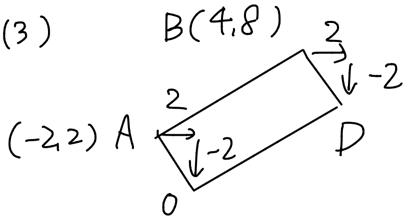
$y=x+b$ に $C(-4,0)$ を代入すると

$0=-4+b$　$b=4$　　$\underline{y=x+4}$ //

(2) Bは $y=\frac{1}{2}x^2$ と $y=x+4$ の交点なので連立方程式を解く。

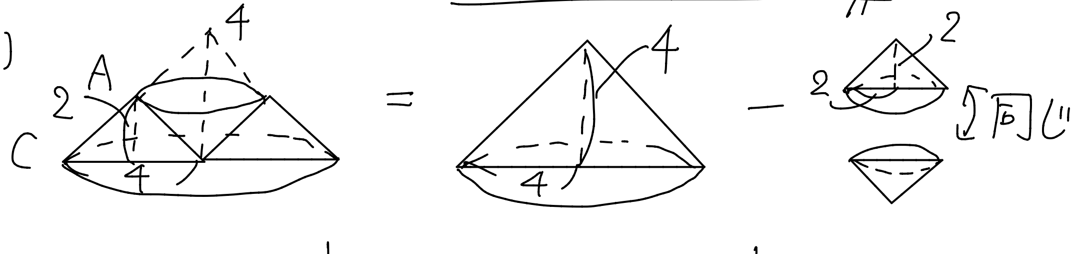
$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=x+4 \end{cases}$　$\frac{1}{2}x^2=x+4$　$x^2=2x+8$　$(x-4)(x+2)=0$　$x=4,-2$　$\underline{B(4,8)}$ //

(3)



平行四辺形なので AO//BD
(4,8)から右へ2，下へ2がDになる。
よってD(6,6) //

(4)



$=4\times4\times\pi\times4\times\frac{1}{3}-2\times(2\times2\times\pi\times2\times\frac{1}{3})$

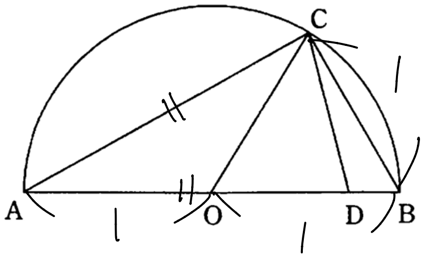
$=\frac{64}{3}\pi-\frac{16}{3}\pi=\frac{48}{3}\pi=\underline{16\pi}$ //

6.

図は，点Oを中心とする半径1の半円で，線分ABは直径である。また，点Cは円周上の点で CB＝1であり，点Dは線分AB上の点で，AC＝ADである。次の問いに答えよ。

(1)　∠ODCの大きさを求めよ。

(2)　線分ODの長さを求めよ。



(1)

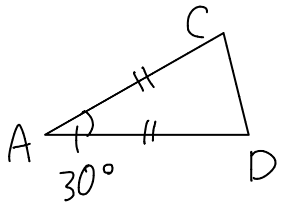
OB＝BC＝OC（半径）

なので△OCBは正三角形

で1つの角∠COB（中心角）

は60°。

これはBCの円周角は∠CAD ＝ 60÷2＝30°

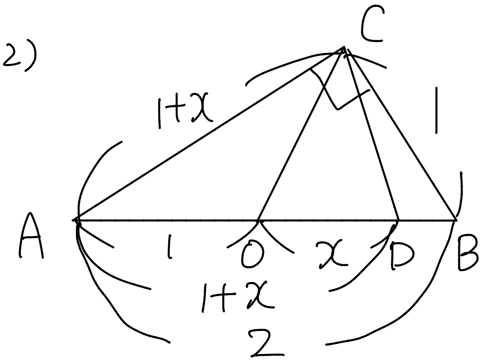


AC＝ADの二等辺三角形なので2つの底角

∠ODC ＝∠ADC＝∠ACD

＝(180−30)÷2＝75°

(2)



AC＝ADの二等辺三角形なので

AD＝1+x＝AC

△ACDで三平方の定理より

$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

$$2^2 = (1+x)^2 + 1^2$$

$$4 = 1 + 2x + x^2 + 1$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{3}$$

$x>0$より　$x = -1+\sqrt{3}$

7.

1から30までの数字が1つずつ書かれた30枚のカードがある。表，裏の区別がつくものとし，すべてのカードを表が上を向いている状態で並べる。この状態から，2の倍数のすべてのカードをひっくり返す。そこから続けて3の倍数のすべてのカード，4の倍数のすべてのカード，…というように，nの倍数のすべてのカードまで順にひっくり返す。このとき次の問いに答えよ。
※例えば$n = 3$のとき，6と書かれたカードは2回ひっくり返されて表が上を向いていることになる。

(1) $n=3$のとき，裏が上を向いているカードは何枚あるか。
(2) $n=24$のとき，24と書かれたカードは何回ひっくり返されたか。
(3) $n=30$のとき，1回だけひっくり返されて裏が上を向いているカードは何枚あるか。

(1) n=3，2と3の倍数の数が裏を向いている。
しかし6の倍数は表を向くので省く。
2，3，4，8，9，10，14，15，16，20
21，22，26，27，28 の 15枚

(2) 24の約数の個数分 表・裏が変わる。
24の約数は 2，3，4，6，8，12，24 の 7回返る

(3) 2～30までの数で約数にならない数は「素数」
つまり 2，3，5，7，11，13，17，19，23，29
10枚