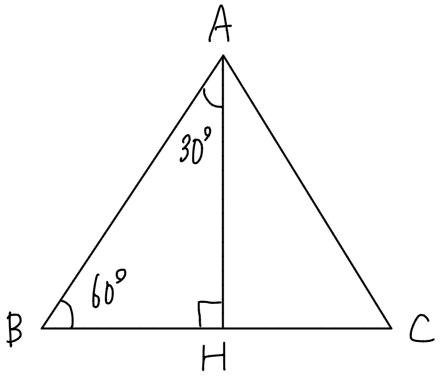
入試テクニック【図形 領域】「① 正三角形の面積 ② 正四面体の体積 ③ 正四面体の表面積と体積と内接球の半径の関係」

1 正三角形の面積



[解説]

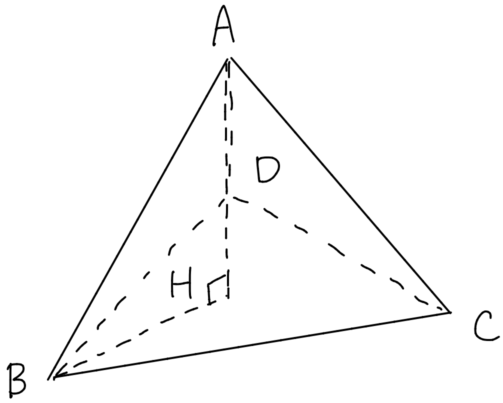
- 頂角Aから底辺BCへの垂線をおろすと、$BH = \frac{1}{2}BC$ となる中点Hが生まれる。

- $\triangle ABH$ は $30°, 60°, 90°$ の直角三角形なので $BH : AB : AH = 1 : 2 : \sqrt{3}$ となる。
  $BH = \frac{a}{2}$, $AB = a$, $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

- $\triangle ABC = BC \times AH \times \frac{1}{2}$
  $= a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (cm²) //

> 1辺 a cmの正三角形の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (cm²)

2 正四面体の体積

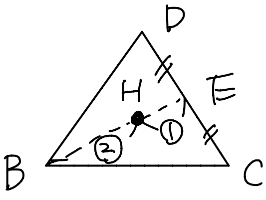


[解説]

- 正四面体の体積
  = 底面(正三角形 BCD) × 高さAH × $\frac{1}{3}$

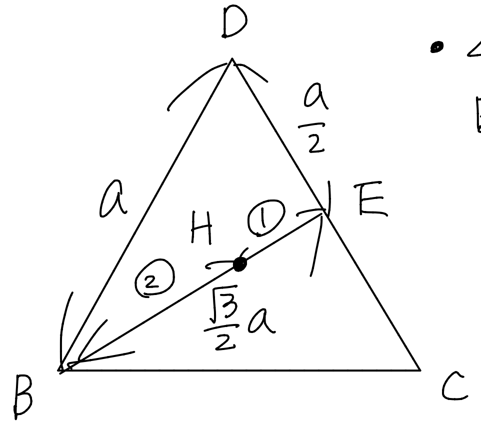
  上の1と同じ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

- 頂点Aから底面への垂線の長さが高さAHなので $\triangle ABH$ で三平方の定理でAHを求める。上から見ると



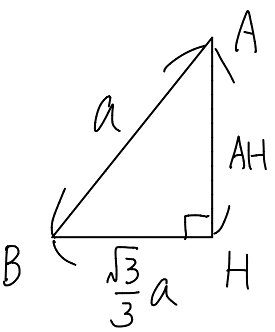
HはDCの中点Eと Bを 2:1 に分ける点 (重心という) である。

> 1辺 a cm の正四面体の体積は $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ (cm³)



- △DBE は 30°, 60°, 90° の直角三角形で、

$BE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ なので $BH = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$



- $AB^2 = AH^2 + BH^2$

$a^2 = AH^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$

$AH^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2$

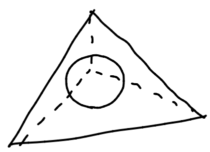
$AH = \sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a$

- 正四面体の体積

= 底面（正三角形 BCD）× 高さ AH × $\frac{1}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3}a \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{18}}{36}a^3 = \frac{3\sqrt{2}}{36}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ (cm³) //

3 正四面体の表面積と体積と内接球の半径の関係



1辺 a cm の正三角形による正四面体において、

内接球の半径を r
正四面体の表面積を S
〃 体積を V
とすると、

$V = \frac{1}{3}rS$ が成り立つ

$V = \frac{1}{3}rS$ より

$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \frac{1}{3}r \times \sqrt{3}a^2$

$r = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ (cm) //

Point

r, S, V どれか2つが分かれば残りの1つが求まる。

- 表面積 = 1つの正三角形の面積 × 4

(S) $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 4 = \sqrt{3}a^2$ (cm²)

- 体積 (V) $= \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ (cm³)（2 より）

◎ 球の表面積と体積もこの関係

$4\pi r^2 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}r} \frac{4}{3}\pi r^3$