難関私立対策④　【　二次関数　グラフ無し（文字の値や範囲）　】　※小問対策

$\boxed{1}$ 2つの関数 $y=ax^2$ と $y=-5x+3$ において，x の値が $\frac{1}{5}$ から $\frac{14}{5}$ まで増加するときの変化の割合が等しくなる。このとき，定数 a の値を求めよ。

$\boxed{2}$ 関数 $y=-2x^2$ について，x の変域を $-2 \leqq x \leqq a$ とするとき，y の変域が $-8 \leqq y \leqq 0$ となるような a のとりうる値の範囲を求めなさい。

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　　　　）

$\boxed{3}$ 関数 $y=x^2$ について，x の変域が $-3 \leqq x \leqq a$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 3a+4$ となるような定数 a の値をすべて求めなさい。

$\boxed{4}$ 2つの関数 $y=ax-6$，$y=bx^2$ は x の変域が $-3 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域が一致する。a，b の値の組を求めよ。

$\boxed{5}$ a を 2 より大きい定数とする。関数 $y=2x^2$ のグラフ上に点 A$(-1,\ 2)$ と点 P$(p,\ 2p^2)$ $(p>2)$ をとり，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 Q$(q,\ aq^2)$ をとる。このとき，O を原点とすると，四角形 OPQA が平行四辺形となり，直線 OQ の傾きが 10 となった。以下の問いに答えよ。

(1) a を含まない p と q の関係式を 2 つ求めよ。

(2) p，q，a の値を求めよ。

$\boxed{1}$ 2つの関数 $y=ax^2$ と $y=-5x+3$ において，x の値が $\frac{1}{5}$ から $\frac{14}{5}$ まで増加するときの変化の割合が等しくなる。このとき，定数 a の値を求めよ。

- $y=-5x+3$ の変化の割合は傾きに等しいので $\boxed{-5}$
- $y=ax^2$ の変化の割合を求める。

y	$\frac{1}{25}a \rightarrow \frac{196}{25}a$
x	$\frac{1}{5} \rightarrow \frac{14}{5}$

$$変 = \frac{yの増加量}{xの増加量} = \frac{\frac{196}{25}a - \frac{1}{25}a}{\frac{14}{5} - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{39}{5}a}{\frac{13}{5}} = \boxed{3a}$$

以上より

$$3a = -5$$
$$a = -\frac{5}{3} \text{//}$$

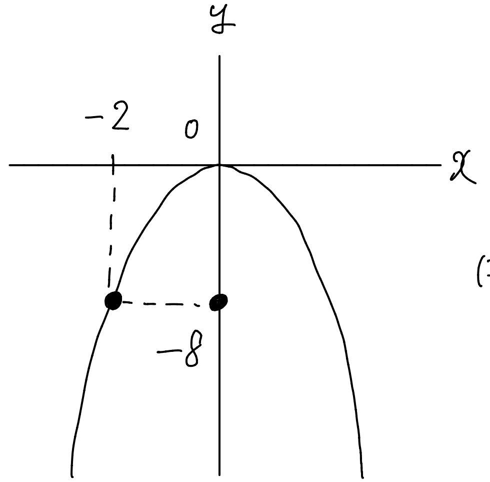
［別アプローチ］

$y=ax^2$ の変化の割合は

$$a\left(\frac{1}{5}+\frac{14}{5}\right) = 3a$$

比例定数　xの増加量の範囲の和

$\boxed{2}$ 関数 $y=-2x^2$ について，x の変域を $-2 \leqq x \leqq a$ とするとき，y の変域が $-8 \leqq y \leqq 0$ となるような a のとりうる値の範囲を求めなさい。

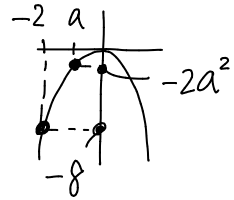


Point
場合分けして考える。

- $x=-2$ を代入すると

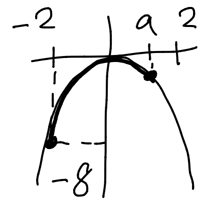
$$y=-2\times(-2)^2$$
$$=-8$$

(I) $-2<a<0$ のとき



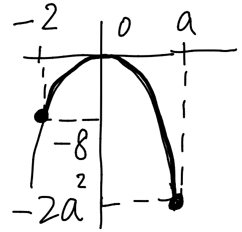
yの最大値が0にならないので ×

(II) $0 \leqq a \leqq 2$ のとき



$-8 \leqq y \leqq 0$ でOK

(III) $2<a$ のとき

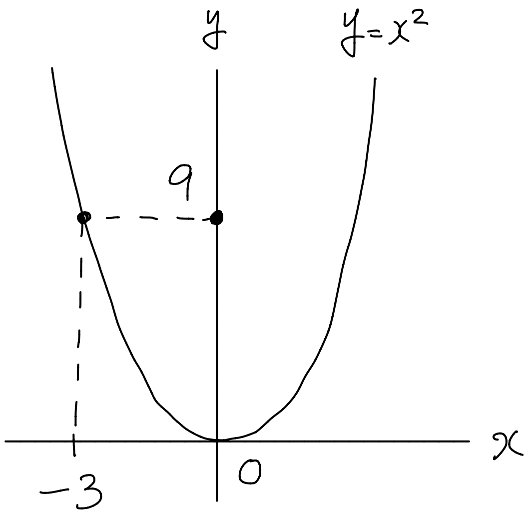


$-2a^2 < y \leqq 0$ となり ×

以上より　$0 \leqq a \leqq 2$ //

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

3 関数 $y=x^2$ について，x の変域が $-3 \leqq x \leqq a$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 3a+4$ となるような定数 a の値をすべて求めなさい。



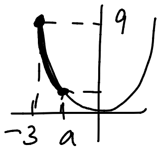
- $x=-3$ のとき
  $y=(-3)^2=9$
  なので左の図のようにかける。
- 場合分けで考える。

(I) $-3 \leqq a < 0$ のとき

y の変域は $0 \leqq y \leqq 3a+4$

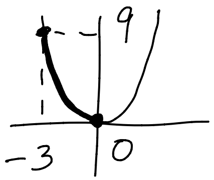
なので最小値 $=0$

つまり $-3 \leqq a < 0$ ではない。



最小値で0をとらないため

(II) $a=0$ のとき



$0 \leqq y \leqq 9$

$0 \leqq y \leqq 3a+4$

と比較すると

$a=0$ のとき

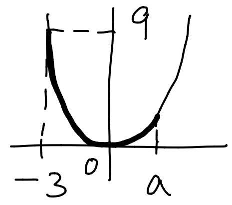
$3a+4=4$

異なるので

×

(III) $0 < a < 3$ のとき

$0 \leqq y \leqq 9$ となり



$0 \leqq y \leqq 3a+4$ と

比較すると

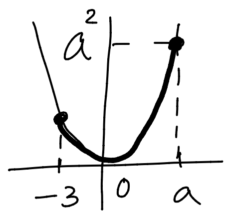
$3a+4=9$

$3a=5$　　$a=\frac{5}{3}$

(IV) $3 < a$ のとき

最大値は $x=a$

のときなので



$0 \leqq y \leqq a^2$

$0 \leqq y \leqq 3a+4$ と

比較すると

$a^2=3a+4$

$a^2-3a-4=0$

$(a-4)(a+1)=0$

$a=4,\ -1$

$3 < a$ より　$a=4$

以上より

$a=\frac{5}{3}$，4

4 2つの関数 $y=ax-6$, $y=bx^2$ は x の変域が $-3 \leqq x \leqq 2$ のとき, y の変域が一致する。a, b の値の組を求めよ。

• $y=ax-6$ について $-3 \leqq x \leqq 2$ のときの y の変域を場合分けして考える。

(I) $a>0$ のとき

グラフは右上がりなので $x=-3$ のとき最小値 $-3a-6$

$x=2$ のとき最大値 $2a-6$ をとる。

∴ $\boxed{-3a-6 \leqq y \leqq 2a-6}$ ①

(II) $a<0$ のとき

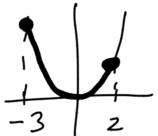
グラフは右下がりなので $x=-3$ のとき最大値 $-3a-6$

$x=2$ のとき最小値 $2a-6$ をとる。

∴ $\boxed{2a-6 \leqq y \leqq -3a-6}$ ②

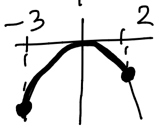
• $y=bx^2$ について $-3 \leqq x \leqq 2$ のときの y の変域を場合分けして考える。

(III) $b>0$ のとき



$\boxed{0 \leqq y \leqq 9b}$ ③

(IV) $b<0$ のとき



$\boxed{9b \leqq y \leqq 0}$ ④

• 問題文より y の変域が一致するので その組み合わせを場合分けする。

(I) ①=③ (II) ①=④ (III) ②=③, (IV) ②=④

(I) $-3a-6=0$, $2a-6=9b$ より $a=-2$, $b=-\frac{10}{9}$

$a>0$, $b>0$ を満たさないので ×

(II) $-3a-6=9b$, $2a-6=0$ より $a=3$, $b=-\frac{5}{3}$

$a>0$, $b<0$ を満たすので ○

(III) $2a-6=0$, $-3a-6=9b$ より $a=3$, $b=-\frac{5}{3}$

$a<0$, $b>0$ を満たさないので ×

(IV) $2a-6=9b$, $-3a-6=0$ より $a=-2$, $b=-\frac{10}{9}$

$a<0$, $b<0$ を満たすので ○

以上より $a=3$, $b=-\frac{5}{3}$

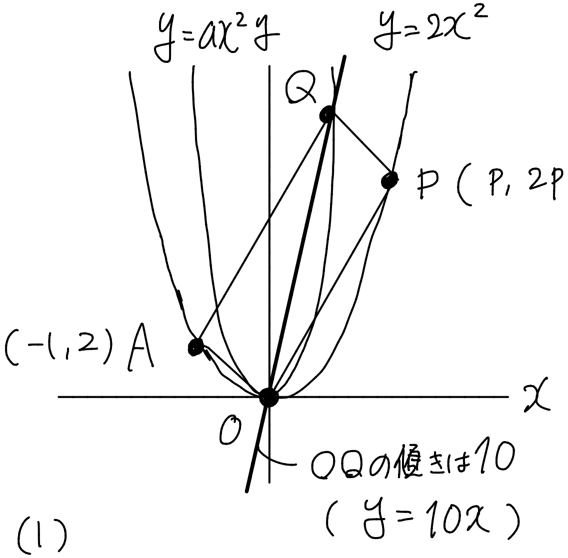
または

$a=-2$, $b=-\frac{10}{9}$ //

5 a を2より大きい定数とする。関数 $y=2x^2$ のグラフ上に点 A$(-1,\ 2)$ と点 P$(p,\ 2p^2)$ $(p>2)$ をとり，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 Q$(q,\ aq^2)$ をとる。このとき，O を原点とすると，四角形 OPQA が平行四辺形となり，直線 OQ の傾きが 10 となった。以下の問いに答えよ。

(1) a を含まない p と q の関係式を2つ求めよ。

(2) p，q，a の値を求めよ。



・$a>2$ なので $y=ax^2$ のグラフと $y=2x^2$ のグラフの位置関係は左図となる。

(1)

Aは原点から左へ1，上へ2移動なので

Qは Pから 〃 させると

Q$(p-1,\ 2p^2+2)$ となる。

Q$(q,\ aq^2)$ なので

$q=p-1$ …①

$aq^2=2p^2+2$ …②

またOQの傾きは10より $\dfrac{aq^2}{q}=10$ …③

・②に③を代入すると

$10q=2p^2+2$) $\div 2$

$5q=p^2+1$ …④

∴ ①と④より $q=p-1$，$q=\dfrac{p^2+1}{5}$ //

(2) ①，④より

$\begin{cases} q=p-1 \\ q=\dfrac{p^2+1}{5} \end{cases}$) 代入。

$p-1=\dfrac{p^2+1}{5}$

$p^2-5p+6=0$

$(p-3)(p-2)=0$

$p=3,\ 2$

問題文より $p>2$

なので $p=3$

代入。

$q=3-1=2$

$q=2$

$q=2$ を③に代入すると

$\dfrac{a\times 4}{2}=10$

$a=5$

以上より

$p=3$

$q=2$

$a=5$ //