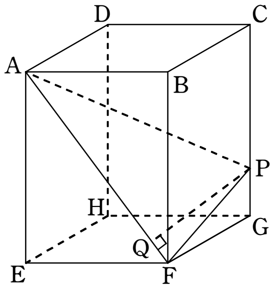
$\boxed{1}$ 図のように，AB＝AD＝3，AE＝4 である直方体 ABCD－EFGH があります。辺 CG 上に，PC＝3 となる点 P をとり，AF⊥PQ となる点 Q をとります。
次の問いに答えなさい。

(1)　AP の長さを求めなさい。

(2)　PQ の長さを求めなさい。

(3)　点 B から平面 AFP に下ろした垂線の長さを求めなさい。



(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

$\boxed{2}$ 右の図のような底面の半径が 2 cm，母線の長さが 6 cm の円錐がある。

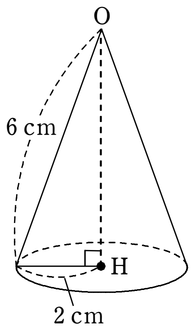
このとき，次の (1) ～ (4) の問いに答えなさい。

(1)　この円錐の高さ OH を求めなさい。

(2)　この円錐の展開図の側面になるおうぎ形の中心角を求めなさい。

(3)　この円錐の表面積を求めなさい。

(4)　この円錐の体積を求めなさい。



3 右の図のような直角三角形 ABC において，AB＝4 cm，AC＝5 cm とする。

このとき，次の (1) ～ (2) の問いに答えなさい。

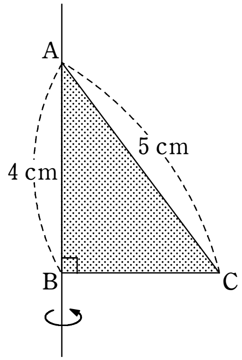
(1) BC の長さを求めなさい。

(2) △ABC を直線 AB を軸として回転させてできる立体について，次の問いに答えなさい。

(ア) この立体の体積を求めなさい。

(イ) この立体の展開図の側面になるおうぎ形の中心角を求めなさい。

(ウ) この立体の表面積を求めなさい。



$\boxed{4}$ 図 1 は，$\angle ABC = \angle ABD = \angle CBD = 90°$，$AB = 8$ cm である三角錐です。この三角錐の展開図は，図 2 のような正方形になりました。

次の (1)，(2) の問いに答えなさい。

(1)　この三角錐の体積を求めなさい。

(2)　図 1 において，点 B から面 ACD にひいた垂線と面 ACD との交点を H とするとき，線分 BH の長さを求めなさい。

図 1

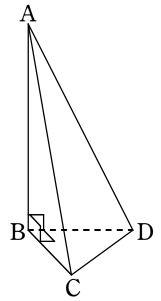
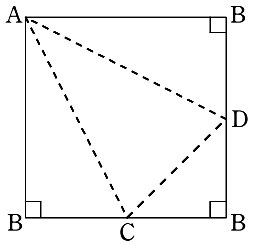
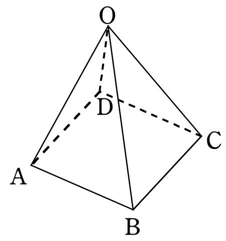


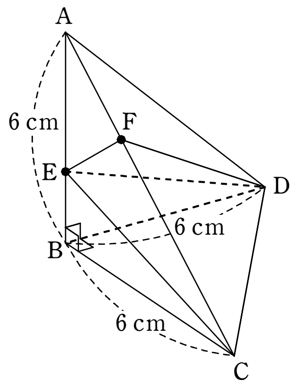
図 2



$\boxed{5}$ 1 辺の長さが 4 の正方形 ABCD を底面とし，
OA＝OB＝OC＝OD である正四角錐 OABCD がある。
この正四角錐の体積が 32 のとき，OA の長さを求めよ。



$\boxed{6}$ 右の図のように，AB＝BC＝BD＝6 cm，
∠ABC＝∠ABD＝∠CBD＝90° の三角錐 ABCD の辺 AB 上に AE : EB＝2 : 1 となる点 E，辺 AC 上に AF : FC＝1 : 2 となる点 F をとる。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　三角錐 ABCD の体積を求めなさい。

(2)　△ABC と △CEF の面積の比を，最も簡単な整数の比で表しなさい。

(3)　立体 F−CDE の体積を求めなさい。

(4)　立体 F−CDE において，頂点 F から底面 CDE に下ろした垂線の長さを求めなさい。

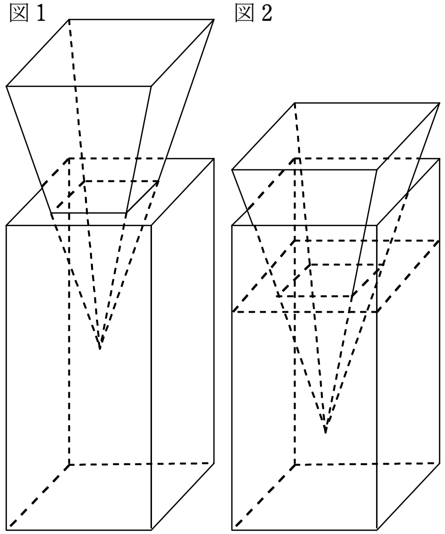
$\boxed{7}$ 底面が1辺6の正方形で高さが12の角柱の容器に水がいっぱい入れてある。この中に，底面が1辺6で高さが12の正四角錐を，底面を水平に保ちながら静かに頂点から沈めていく。

このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　図1のように，角錐の頂点を水面から深さ6だけ沈めたとき，あふれ出た水の体積を求めなさい。

(2)　角錐の頂点が，容器の底面に達してから，図2の状態まで角錐を引き上げると，水面の面積が容器の底面積の $\dfrac{3}{4}$ になった。このときの容器内の水の深さを求めなさい。

図1　図2

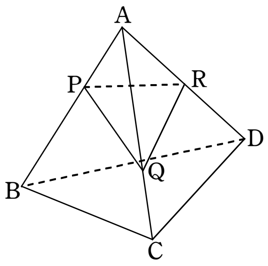


$\boxed{8}$ 右の図のように，1 辺の長さが 8 の正四面体 ABCD の辺 AB，AC，AD 上にそれぞれ 3 点 P，Q，R がある。AP＝3，AQ＝5，AR＝4 であるとき，次の各問いに答えよ。

(1)　△APQ と △ABC の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

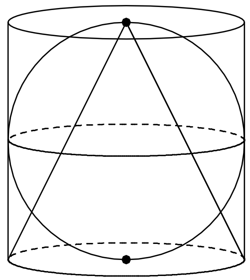
(2)　四面体 A－PQR と正四面体 ABCD の体積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

(3)　四面体 A－PQR の体積を求めよ。

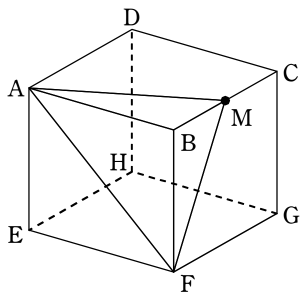


$\boxed{9}$ 右の図のように，底面の直径と高さが等しい円柱と，その円柱にちょうど入る大きさの円錐と球がある。

円柱の体積が $54\pi\ \mathrm{cm}^3$ のとき，円錐の体積は ア $\boxed{}$ cm^3 で，球の体積は イ $\boxed{}$ cm^3 である。



$\boxed{10}$ 右の図のように，1 辺の長さが 4 の立方体 ABCD－EFGH があり，点 M を辺 BC 上にとります。3 点 A，F，M を通る平面でこの立体を切ります。このとき，次の各問いに答えなさい。



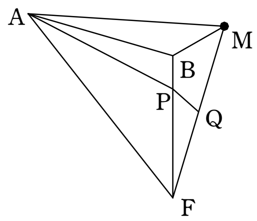
(1)　点 Mが辺 BC の中点にあるとき，次のものを求めなさい。

(ア)　辺 AM の長さ

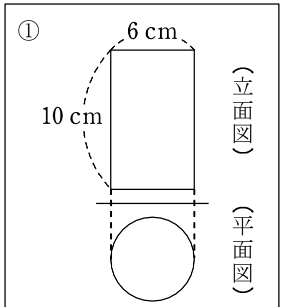
(イ)　三角錐 B－AFM の体積

(ウ)　△AFM を底面とする三角錐 B－AFM の高さ

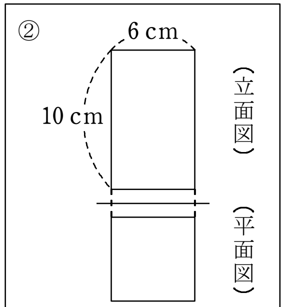
(2)　点 A から辺 BF 上の点 P を通り，辺 FM の中点 Q まで線を引きます。線分 AP と線分 PQ の長さの和を最小にしたところ，線分 PQ と辺 FM が垂直に交わりました。このとき，線分 BM の長さを求めなさい。



11 下の図は，数学の授業で学んだ立体を投影図に表したものである。①，② のどちらか 1 つを選び，その投影図で表された立体の表面積を求めなさい。なお，円周率は π とし，選んだ投影図の記号を解答欄に書くこと。

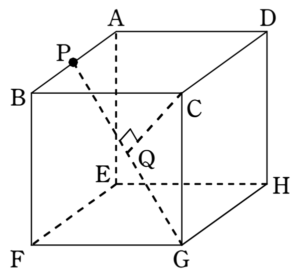


立体は円柱



立体は正四角柱

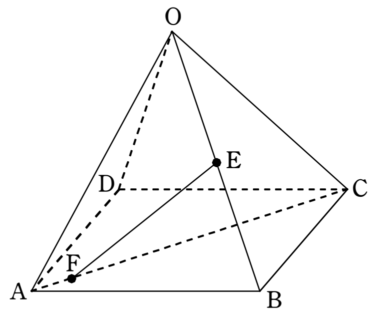
$\boxed{12}$ 1 辺の長さが 6 の立方体 ABCD－EFGH において，辺 AB の中点を P とするとき，線分 PG の長さは $^{ア}\boxed{}$，点 C から線分 PG に引いた垂線 CQ の長さは $^{イ}\boxed{}$ である。



$\boxed{13}$ 右の図のように，1 辺の長さが 8 cm の正方形 ABCD を底面とし，側面がすべて正三角形である正四角錐 OABCD がある。
辺 OB の中点を E とし，線分 AC 上に
AF＝$\sqrt{2}$ cm となる点 F をとる。
このとき，次の (1)，(2) の問いに答えなさい。

(1)　正四角錐 OABCD の表面積を求めなさい。

(2)　線分 EF の長さを求めなさい。



$\boxed{14}$ 右の図1に示した立体ABC－DEFは，
AB＝AC＝AD＝9 cm，
∠BAC＝∠BAD＝∠CAD＝90°の三角柱である。
辺EFの中点をMとする。
頂点Cと点Mを結び，線分CM上にある点をPとする。
頂点Bと点P，頂点Dと点Pをそれぞれ結ぶ。
次の各問に答えよ。

(1) 図1において，点Pが頂点Cに一致するとき，
∠BPDの大きさは，$\boxed{}$度である。

(2) 右の図2は，図1において，頂点Aと点P，頂点Bと頂点Dをそれぞれ結んだ場合を表している。
CP：PM＝2：1のとき，立体P－ABDの体積は，
$\boxed{}$ cm^3である。

図1

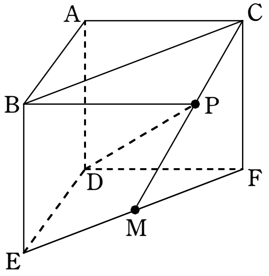
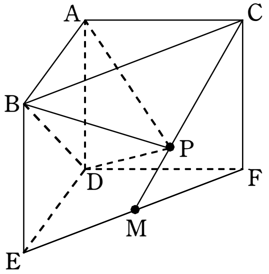
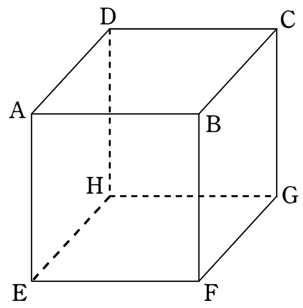


図2



15 右図のように，1 辺が 10 cm の立方体 ABCD－EFGH がある。この立方体を 3 点 A，C，F を通る平面で切るとき，次の問いに答えなさい。



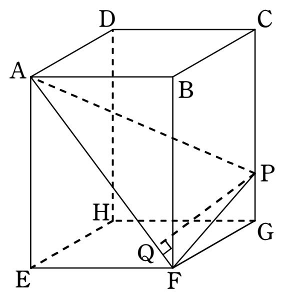
(1)　△AFC の面積を求めなさい。

(2)　点 B から △AFC に下ろした垂線の長さを求めなさい。

(3)　点 H を含む立体において，辺 AF 上に点 P，辺 CF 上に点 Q をとるとき，3 つの線分の和 EP＋PQ＋QG の最小値を求めなさい。

※ (3) は流れだけ組み立てよう。答は計算しなくてよいです。(計算難しいので…。)

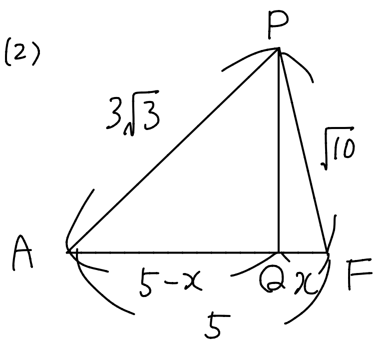
1 図のように，AB＝AD＝3，AE＝4 である直方体 ABCD－EFGH があります。辺 CG 上に，PC＝3 となる点 P をとり，AF⊥PQ となる点 Q をとります。
次の問いに答えなさい。
(1)　AP の長さを求めなさい。
(2)　PQ の長さを求めなさい。
(3)　点 B から平面 AFP に下ろした垂線の長さを求めなさい。



(1) $AP=\sqrt{AC^2+CP^2}$ なので $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}$ を先に求めると，$AC=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

$\therefore AP=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{27}=\underline{3\sqrt{3}}$

(2)



• $AF=\sqrt{AB^2+AE^2}=5$

• $PF=\sqrt{PG^2+FG^2}=\sqrt{10}$

△APQと△FPQでPQを求める
三平方の定理を用いると

• $PQ=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(5-x)^2}$
↑△APQで。　↓△FPQで
• $PQ=\sqrt{(\sqrt{10})^2-x^2}$

等しい

$\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(5-x)^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-x^2}$

両辺2乗して解く。

$\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(5-x)^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-x^2}$　↓ 2乗すると√が外れる。

$(3\sqrt{3})^2-(5-x)^2=(\sqrt{10})^2-x^2$

$27-(25-10x+x^2)=10-x^2$

$27-25+10x-x^2=10-x^2$　　$x=\frac{4}{5}$

• △FPQで $PQ=\sqrt{(\sqrt{10})^2-(\frac{4}{5})^2}=\underline{\frac{3\sqrt{26}}{5}}$

(3) 三角錐ABFPの体積を2通りで表し等式にする。

• 底面を△BFP，高さをABとする場合

$\triangle BFP=BF\times BC\times\frac{1}{2}=4\times3\times\frac{1}{2}=6$

$\therefore A-BFP=6\times3\times\frac{1}{3}=6$ …①

• 底面を△AFP，高さをBからの垂線 h とおく。とする場合

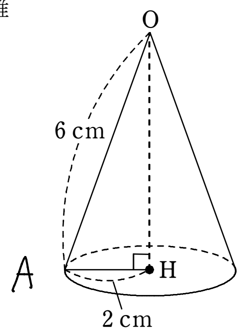
$\triangle AFP=AF\times PQ\times\frac{1}{2}=5\times\frac{3\sqrt{26}}{5}\times\frac{1}{2}$

$\therefore B-AFP=\frac{3\sqrt{26}}{2}\times h\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{26}}{2}h$ …②

以上より ①＝②で $6=\frac{\sqrt{26}}{2}h$　　$h=\underline{\frac{6\sqrt{26}}{13}}$

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

2 右の図のような底面の半径が 2 cm，母線の長さが 6 cm の円錐がある。
このとき，次の (1) ～ (4) の問いに答えなさい。
(1)　この円錐の高さ OH を求めなさい。
(2)　この円錐の展開図の側面になるおうぎ形の中心角を求めなさい。
(3)　この円錐の表面積を求めなさい。
(4)　この円錐の体積を求めなさい。



(1) △OAH で三平方の定理を用いると，

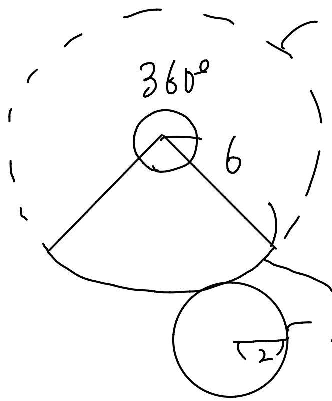
$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2}$

$= \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}$ cm //

Point
求める辺を含む直角三角形を見つける。

---

(2) 展開図をかくと



元の円周の長さは
$6 \times 2 \times \pi = 12\pi$

弧の長さも等しい。

$2 \times 2 \times \pi$
$= 4\pi$ (cm)
(円周)

Point
割合!!!
$\dfrac{\text{弧の長さ}}{\text{元の円周}}$

$360° \times \dfrac{4\pi}{12\pi}$
$= 120°$ //

(3) 底面積 $= 2 \times 2 \times \pi = 4\pi$

側面積 $= 6 \times 6 \times \pi \times \dfrac{120°}{360°}$

$= 12\pi$

∴ $12\pi + 4\pi = 16\pi$ (cm²) //

Point
◎ 表面積 ＝ 側面積 ＋ 底面積

---

(4) 底面積は (3)
高さは (1) で求まっているので

求める体積 ＝

$4\pi \times 4\sqrt{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ (cm³) //

Point
◎ 円錐の体積
$=$ 底面積 × 高さ × $\dfrac{1}{3}$

Point
いきなり (3) や (4) が問われたらこの流れで解けることを理解しておこう。

$\boxed{3}$ 右の図のような直角三角形 ABC において，AB＝4 cm，AC＝5 cm とする。
このとき，次の (1) ～ (2) の問いに答えなさい。

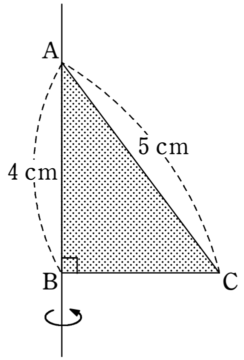
(1) BC の長さを求めなさい。

(2) △ABC を直線 AB を軸として回転させてできる立体について，次の問いに答えなさい。

(ア) この立体の体積を求めなさい。

(イ) この立体の展開図の側面になるおうぎ形の中心角を求めなさい。

(ウ) この立体の表面積を求めなさい。

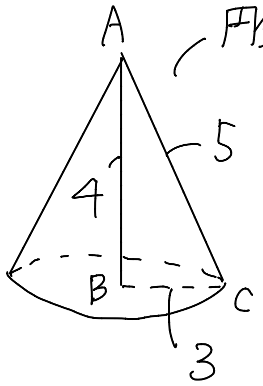


(1) △ABCで三平方の定理を用いて

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

3:4:5 の直角三角形と覚えておくと早い。

(2) (ア)



円錐になる。

体積 = 底面積(円) × 高さ × $\frac{1}{3}$

$= 3 \times 3 \times \pi \times 4 \times \frac{1}{3}$

$= 12\pi$ (cm³)

(イ) 先ほどの $\boxed{2}$ と同じ流れ。

$$360^\circ \times \frac{\text{底面の円周の長さ}}{\text{元の円の円周の長さ}} = 360^\circ \times \frac{3 \times 2 \times \pi}{5 \times 2 \times \pi}$$

$= 216^\circ$

(ウ) 表面積 = 側面積 + 底面積

$= 5 \times 5 \times \pi \times \frac{216}{360} + 3 \times 3 \times \pi$

$= 15\pi + 9\pi = 24\pi$ (cm²)

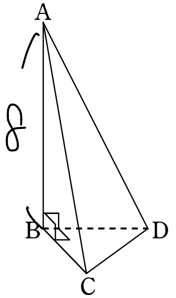
Point

- 中心角を求める問題
- 側面のおうぎ形の面積を求める問題
- 表面積を求める問題

これらはよく問われるので理解し素早く処理できるようにしよう。

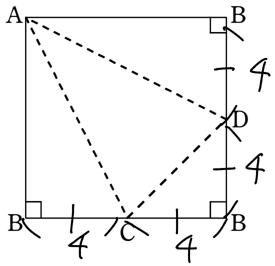
4 図1は，∠ABC＝∠ABD＝∠CBD＝90°，AB＝8 cm である三角錐です。この三角錐の展開図は，図2のような正方形になりました。
次の(1)，(2)の問いに答えなさい。
(1) この三角錐の体積を求めなさい。

図1



(2) 図1において，点Bから面ACDにひいた垂線と面ACDとの交点をHとするとき，線分BHの長さを求めなさい。

図2



(1) 展開図が正方形であり，
ぴったり重なる辺に注目すると，
BC＝CB，BD＝DB とわかるので BC＝BD＝4

• 体積 ＝ 底面 △BCD × 高さ AB × $\frac{1}{3}$

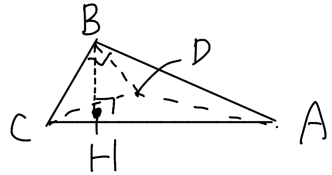
$= BC \times BD \times \frac{1}{2} \times AB \times \frac{1}{3}$

$= 4 \times 4 \times \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{1}{3} = \frac{64}{3}$ (cm³)

Point

1 の(3)と同じ流れで(2)は解ける。

(2)



この立体の体積は
2通りで求められるので
その2つの式を等式に表す。

• (1)の求め方で $\frac{64}{3}$ … ①

• 体積 ＝ 底面 △ACD × 高さ BH × $\frac{1}{3}$

$= 24 \times BH \times \frac{1}{3} = 8BH$ … ②

△ACD ＝ □ABCD －(△ABC×2)－△BCD

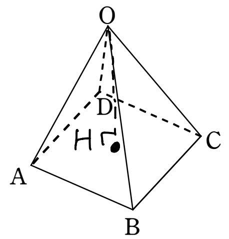
$= 8 \times 8 - (4 \times 8 \times \frac{1}{2} \times 2) - 4 \times 4 \times \frac{1}{2}$

$= 64 - 32 - 8 = 24$ cm²

• ① ＝ ② より

$8BH = \frac{63}{3}$　$BH = \frac{63}{24} = \frac{8}{3}$ cm

5 1辺の長さが4の正方形ABCDを底面とし，
OA＝OB＝OC＝ODである正四角錐OABCDがある。
この正四角錐の体積が32のとき，OAの長さを求めよ。
① ②



正四角錐の体積

$= $ 底面積（正方形ABCD）× 高さ（OH）× $\frac{1}{3}$

であることを最初に確認し，わかっている値を代入していく。

① 正四角錐の体積

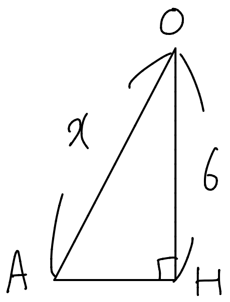
$$4 \times 4 \times OH \times \frac{1}{3} = 32 \cdots$$

$$OH = 6$$

方程式で解くために，問題文より右辺を32とおいた。

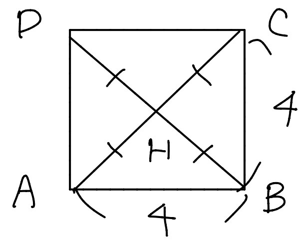
② OAを含む直角三角形で三平方の定理を用いて，OAの長さを求める。

△OAH において
現在までに分かっているのは
求めたい $OA = x$，$OH = 6$。



よってAHを求めればよい。

・AHを含む直角三角形を考えると，
Hは底面ABCDの2つの対角線の交点であり
AC, DBの中点となる。



・AB＝CB＝4 なので
△ABCの三平方で

$$AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

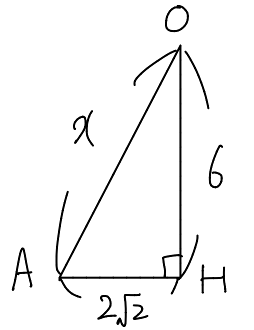
$$AH = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2}$$

1:1:$\sqrt{2}$ で素早く求めたい。

② の後半

・△OAHで三平方。

$$x = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 6^2}$$
$$= \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$



Point

求めたい長さを含む直角三角形で三平方の定理を用いて話を進めていく。

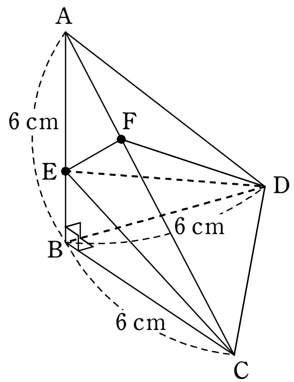
6 右の図のように，AB＝BC＝BD＝6 cm，∠ABC＝∠ABD＝∠CBD＝90° の三角錐 ABCD の辺 AB 上に AE : EB＝2 : 1 となる点 E，辺 AC 上に AF : FC＝1 : 2 となる点 F をとる。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 三角錐 ABCD の体積を求めなさい。

(2) △ABC と △CEF の面積の比を，最も簡単な整数の比で表しなさい。

(3) 立体 F−CDE の体積を求めなさい。

(4) 立体 F−CDE において，頂点 F から底面 CDE に下ろした垂線の長さを求めなさい。

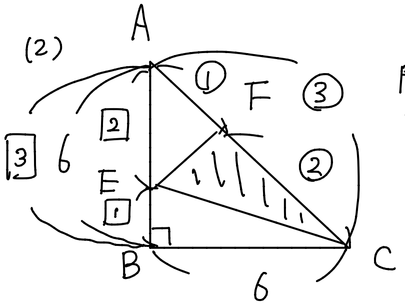


(1) 体積 ＝ 底面積（△BCD）× 高さ（AB）× $\frac{1}{3}$

$= BC \times BD \times \frac{1}{2} \times AB \times \frac{1}{3}$

$= 6 \times 6 \times \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{1}{3} = 36$ (cm³)

(2)



問題文の条件を入れると，←この状況。

Point

面積比の問題なので「平面」で考える。

$\triangle CEF = \underbrace{\triangle ABC \times \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}}_{\triangle AEC} \times \frac{②}{③}$

∴ $\triangle CEF = \frac{4}{9} \triangle ABC$ となり

$9 : 4$

Point

高さの等しい三角形の面積比は，底辺比と等しい。

(3) (2)で △CEF の面積が △ABC の $\frac{4}{9}$ 倍で求まり，平面 ABC ⊥ BD であることより高さを BD とすることができることがわかる。

Point

- 底面と高さをどこに設定すると，求めやすいか。
- 前問がヒントになっていることが多い。

以上より

体積 ＝ 底面積（△CEF）× 高さ（BD）× $\frac{1}{3}$

$= \triangle ABC \times \frac{4}{9} \times 6 \times \frac{1}{3}$

$= 6 \times 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} \times 6 \times \frac{1}{3} = 16$ (cm³)

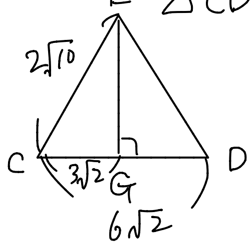
(4) △CDE は EC＝ED の二等辺三角形なので EC を △EBC の直角三角形で求めると，

$EC = \sqrt{EB^2 + BC^2} = 2\sqrt{10}$

$EG = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{22}$

$\triangle CDE = 6\sqrt{2} \times \sqrt{22} \times \frac{1}{2}$

$= 6\sqrt{11}$



Point

見えない高さは h と文字において，他の底面と高さで体積を求めて「方程式」で解く。

- F から △CDE への垂線の長さを h とすると

体積 $= 6\sqrt{11} \times h \times \frac{1}{3}$

(3)より 16　　$16 = 6\sqrt{11} \times h \times \frac{1}{3}$　　$h = \frac{8\sqrt{11}}{11}$ cm

[7] 底面が1辺6の正方形で高さが12の角柱の容器に水がいっぱい入れてある。この中に，底面が1辺6で高さが12の正四角錐を，底面を水平に保ちながら静かに頂点から沈めていく。
このとき，次の問いに答えなさい。
(1) 図1のように，角錐の頂点を水面から深さ6だけ沈めたとき，あふれ出た水の体積を求めなさい。
(2) 角錐の頂点が，容器の底面に達してから，図2の状態まで角錐を引き上げると，水面の面積が容器の底面積の $\frac{3}{4}$ になった。このときの容器内の水の深さを求めなさい。

図1

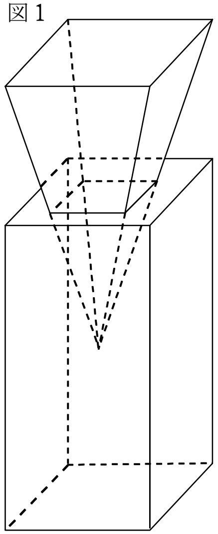
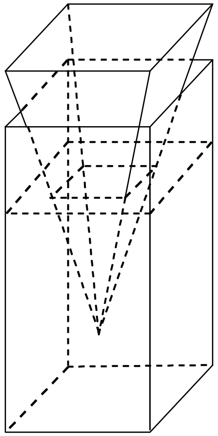
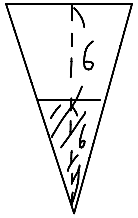


図2



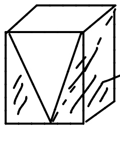
(1)



沈めた部分の立体 と 元の立体 とは
相似であり $12:6 = 2:1$ なので
体積比 $= 2^3 : 1^3 = 8:1$
∴ 元の体積 $\times \frac{1}{8}$ で求められる。

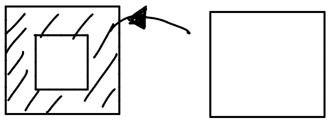
$$6 \times 6 \times 12 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} = 18$$

(2) 角錐の頂点が容器の底面に達したとき，
残った水の体積は，$6 \times 6 \times 12 - 6 \times 6 \times 12 \times \frac{1}{3}$



$= 288$

- 図2の状態のとき，三角錐が水につかっている部分の底面積は，もとの三角錐の底面積の



の $\frac{3}{4}$ 倍なので □ は $\frac{1}{4}$

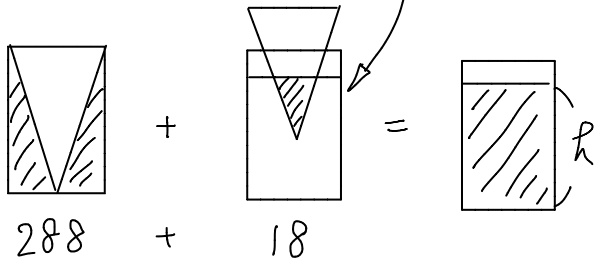
$$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

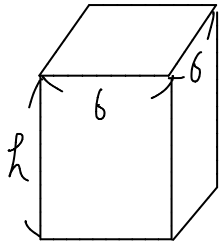
- 水中にある三角錐ともとの三角錐も相似なので面積比が $\frac{1}{4} : 1$ なので

$$相似比 = \sqrt{\frac{1}{4}} : 1 = \frac{1}{2} : 1 = 1 : 2$$

つまり，図1であふれた水の量 ＝ 図2で水につかっている水の量 ということ。

-





$$6 \times 6 \times h = 288 + 18$$

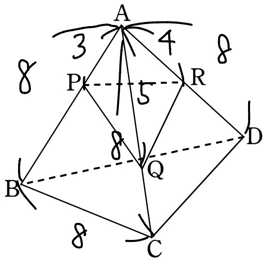
$$h = \frac{17}{2}$$

8 右の図のように，1辺の長さが8の正四面体ABCDの辺AB，AC，AD上にそれぞれ3点P，Q，Rがある。AP=3，AQ=5，AR=4であるとき，次の各問いに答えよ。

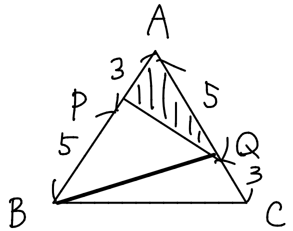
(1) △APQと△ABCの面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

(2) 四面体A－PQRと正四面体ABCDの体積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

(3) 四面体A－PQRの体積を求めよ。



(1) 正四面体ABCDは1辺8の正三角形が4つ合わさってできたもの。



$$\triangle APQ = \underbrace{\triangle ABC \times \frac{AQ}{AC}}_{\triangle ABQ} \times \frac{AP}{AB}$$

$$= \triangle ABC \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{15}{64}\triangle ABC$$

$$\therefore\ \triangle APQ : \triangle ABC = 15 : 64$$

(2)
$$A-PQR = ABCD \times \frac{AP}{AB} \times \frac{AQ}{AC} \times \frac{AR}{AD}$$

$$= ABCD \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{15}{128} ABCD$$

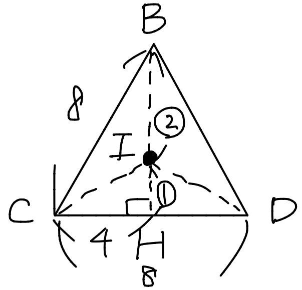
$$\therefore\ A-PQR : ABCD = 15 : 128$$

(3)

◎解く流れ

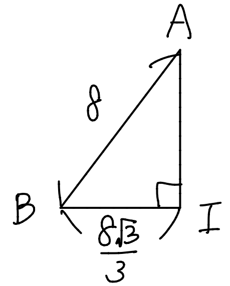
頂点Aから△BCDにおろした垂線AIを含む直角三角形△ABIで考えると正四面体ABCDの体積が求まり (2)より A－PQRが求まる。

- Iは次の位置になる。



上から見ると，側面の3つの正三角形が合同。
(この図だと△BCH，△BHD △CHDがすべて合同)

- △BCHは$\angle BCH = 60^\circ$，$\angle BHC = 90^\circ$の $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形になる。$BH = 4\sqrt{3}$ で $BI : IH = 2 : 1$ より $BI = \frac{2}{3} \times 4\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$



- △ABIで三平方を用いて
$$AI = \sqrt{8^2 - \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

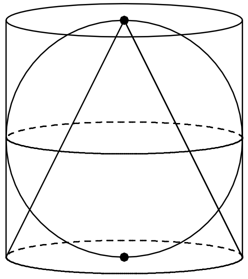
- $\triangle BCD = 8 \times 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 16\sqrt{3}$

以上より 正四面体 $= 16\sqrt{3} \times \frac{8\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{128\sqrt{2}}{3}$

(2)より $A-PQR = \frac{128\sqrt{2}}{3} \times \frac{15}{128} = 5\sqrt{2}$

$\boxed{9}$ 右の図のように，底面の直径と高さが等しい円柱と，その円柱にちょうど入る大きさの円錐と球がある。②

① 円柱の体積が 54π cm^3 のとき，円錐の体積は ア $\boxed{}$ cm^3 で，球の体積は イ $\boxed{}$ cm^3 である。



① より

円錐の体積 $= $ 円柱の体積 $\times \frac{1}{3}$

$= 54\pi \times \frac{1}{3} = 18\pi$ (cm^3) //

② より 底面の円の半径を r cm とすると，
高さは 2r cm になる。 ∴ $\boxed{1}$

図1

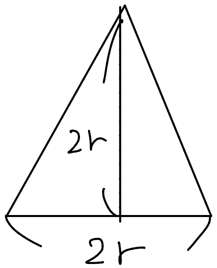


図2

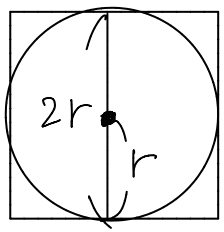


図1 の体積 $= 18\pi$ より r を求める。

$r \times r \times \pi \times 2r \times \frac{1}{3} = 18\pi$

$\pi r^3 = 27\pi$ となり，

球の体積が $\frac{4}{3}\pi r^3$ から， ∴ $\boxed{2}$

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 27\pi = 36\pi$ cm^3 //

Point

$\boxed{1}$ 何を求めるのかを考え，「文字」をおく。

$\boxed{2}$ これが求まればよいので「値」を求めなくてもよいという判断。

10 右の図のように，1辺の長さが4の立方体ABCD－EFGHがあり，点Mを辺BC上にとります。3点A，F，Mを通る平面でこの立体を切ります。このとき，次の各問いに答えなさい。

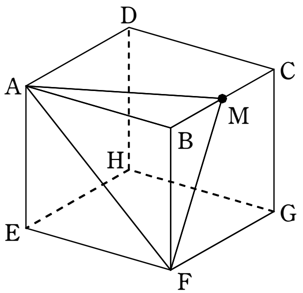
(1) 点Mが辺BCの中点にあるとき，次のものを求めなさい。

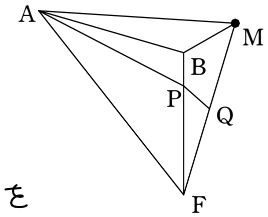
(ア) 辺AMの長さ

(イ) 三角錐B－AFMの体積

(ウ) △AFMを底面とする三角錐B－AFMの高さ

(2) 点Aから辺BF上の点Pを通り，辺FMの中点Qまで線を引きます。線分APと線分PQの長さの和を最小にしたところ，線分PQと辺FMが垂直に交わりました。このとき，線分BMの長さを求めなさい。





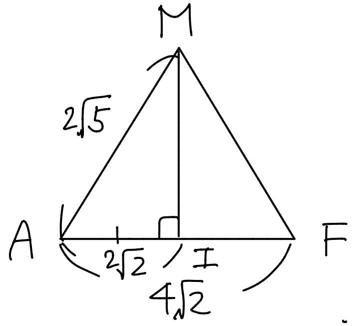
(1)(ア) 直角三角形ABMで三平方の定理を用いて，$AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=2\sqrt{5}$ //

(イ) 底面を△BFM，高さをABと考えられるので

体積 $= \triangle BFM \times AB \times \frac{1}{3}$

$= BM \times BF \times \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$ //

(ウ) 求める高さをhとおき，△AFMの面積を求める。



$\triangle AFM = AF \times MI \times \frac{1}{2}$

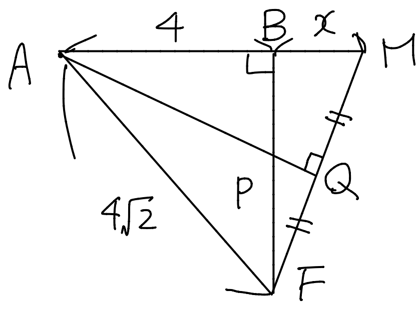
$MI = \sqrt{AM^2 - AI^2}$

$= \sqrt{20 - 8} = 2\sqrt{3}$

$\therefore \triangle AFM = 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{6}$

高さhと△AFM $4\sqrt{6}$を用いると，体積は，(イ)と等しくなるので $4\sqrt{6} \times h \times \frac{1}{3} = \frac{16}{3}$　$h = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ //

(2)



図より △AQM≡△AQF の二等辺三角形なので $AF = AM = 4\sqrt{2}$

$BM = AM - AB$

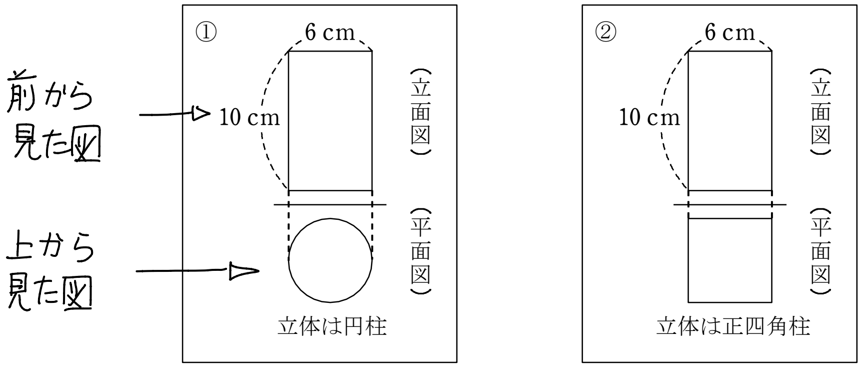
$= 4\sqrt{2} - 4$ //

Point

- (1)(ウ)が最も難しく(2)が比較的簡単なパターンでした。
- (ウ)であきらめて(2)を読まない人も多かったと思います。
- あとの問題ほど難しいわけではないので注意したい。

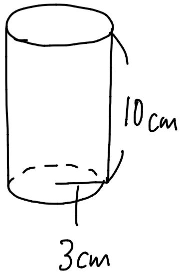
全問考えてみると1、2点は拾える!!

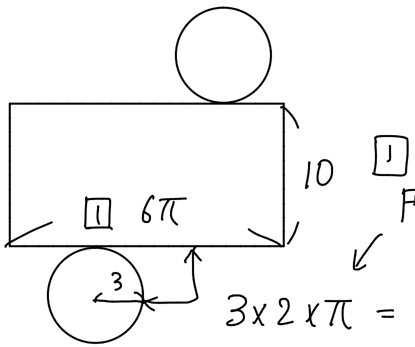
11 下の図は，数学の授業で学んだ立体を投影図に表したものである。①，② のどちらか1つを選び，その投影図で表された立体の表面積を求めなさい。なお，円周率は π とし，選んだ投影図の記号を解答欄に書くこと。



①

表面積を求めるため、展開図をかく。



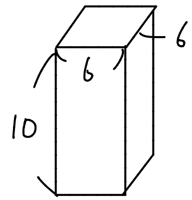


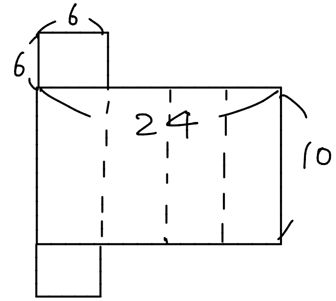
円周の長さと等しい。

$3 \times 2 \times \pi = 6\pi$

- 表面積 = 側面積 + 底面積 = $60\pi + 18\pi = 78\pi$ (cm²)
- 側面積 = $6\pi \times 10 = 60\pi$
- 底面積 = $3 \times 3 \times \pi = 9\pi$ 2つあるので 18π

②





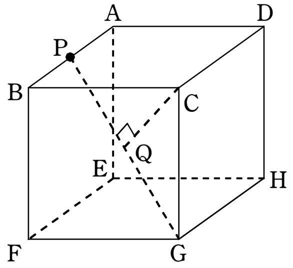
- 側面積 = $24 \times 10 = 240$
- 底面積 = $6 \times 6 = 36$ 2つあるので 72

表面積 = $240 + 72 = 312$ cm²

Point

表面積、体積を求める場合「展開図」をサッとかけるようにしておこう。

$\boxed{12}$ 1辺の長さが6の立方体ABCD－EFGHにおいて，辺ABの中点をPとするとき，線分PGの長さは ア$\boxed{}$，点Cから線分PGに引いた垂線CQの長さは イ$\boxed{}$ である。



ア PGを含む直角三角形PBGで三平方の定理を用いると，

$$PG = \sqrt{PB^2 + BG^2} = \sqrt{3^2 + BG^2}$$

BGは△BFGから

$$BG = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

代入。$\sqrt{9+72} = 9$ //

イ

方針　△PCGの面積を2通りで表し，方程式にしてCQを求める。

$$\underbrace{\text{底辺}PG}_{=9} \times \underbrace{\text{高さ}CQ}_{\text{求めるもの}} \times \frac{1}{2} = \underbrace{\text{底辺}PC}_{\triangle PBC\text{より}} \times \underbrace{\text{高さ}CG}_{=6} \times \frac{1}{2}$$

$$PC = \sqrt{PB^2 + BC^2} = 3\sqrt{5}$$

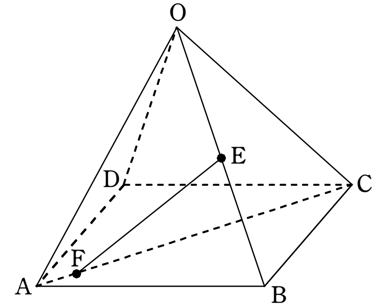
$$9 \times CQ \times \frac{1}{2} = 3\sqrt{5} \times 6 \times \frac{1}{2}$$

$$CQ = 2\sqrt{5}$$ //

13 右の図のように，1辺の長さが8 cmの正方形ABCDを底面とし，側面がすべて正三角形である正四角錐OABCDがある。
辺OBの中点をEとし，線分AC上に$AF=\sqrt{2}$ cmとなる点Fをとる。
このとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

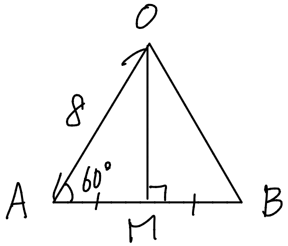
(1) 正四角錐OABCDの表面積を求めなさい。

(2) 線分EFの長さを求めなさい。



(1) OABCDの表面積 ＝ ① 側面積（1つの正三角形 × 4）
＋ ② 底面積（△ABCD）

①



・OからABに垂線を引き交点をMとすると，Mは ABの中点であり △OAMは 30°, 60°, 90°の直角三角形なので

$OM = 4\sqrt{3}$

$\triangle OAB = AB \times OM \times \frac{1}{2}$

$= 8 \times 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2}$

$= 16\sqrt{3}$ (cm²)

∴ 側面積 $= 16\sqrt{3} \times 4 = 64\sqrt{3}$

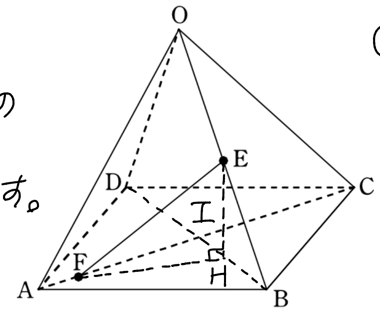
② 底面積 ＝ 1辺 8 cmの正方形

$= 8 \times 8 = 64$ (cm²)

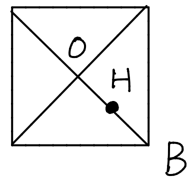
以上より　表面積は，$64 + 64\sqrt{3}$ (cm²)

(2)

〇数字の流れで作っています。



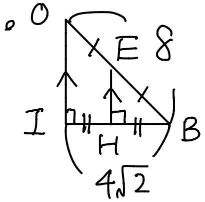
① EFを含む直角三角形を作るために，Eから底面DABCへ垂線をおろすと，DB上にHが作られ、これより△EFHが生まれた。

②


上から見るとEはOBの中点なのでHはIBの中点となる。

③ △EFHで三平方の定理を用いるために，求めるEF以外に，EH，FHの長さを求める。

・EHは △OIB ∽ △EHB で求める。

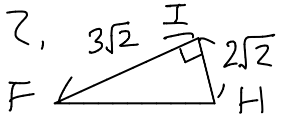


今は左図の状況なので $OI = 4\sqrt{2}$。

EとHは中点なので△OIBと△EHBは2:1の相似比で

$EH = \frac{1}{2} OI = 2\sqrt{2}$

・FHは △FIHの直角三角形で三平方を用いて，



・HはIBの中点なので $2\sqrt{2}$

・$AF = \sqrt{2}$ より $FI = 3\sqrt{2}$

（左下の続き）

$FH = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{26}$

よって

$EF = \sqrt{EH^2 + FH^2}$

$= \sqrt{26 + 8}$

$= \sqrt{34}$

$\sqrt{34}$ cm

14 右の図１に示した立体 ABC－DEF は，
AB＝AC＝AD＝9 cm，
∠BAC＝∠BAD＝∠CAD＝90° の三角柱である。
辺 EF の中点を M とする。
頂点 C と点 M を結び，線分 CM 上にある点を P とする。
頂点 B と点 P，頂点 D と点 P をそれぞれ結ぶ。
次の各問に答えよ。

(1)　図１において，点 P が頂点 C に一致するとき，
∠BPD の大きさは，[　　] 度である。

(2)　右の図２は，図１において，頂点 A と点 P，頂点 B と頂点 D をそれぞれ結んだ場合を表している。
CP：PM＝2：1 のとき，立体 P－ABD の体積は，
[　　] cm³ である。

Pのみ固定されていない。

図１

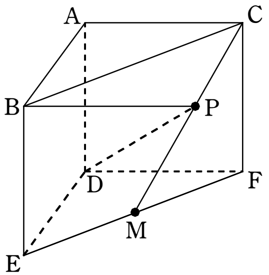
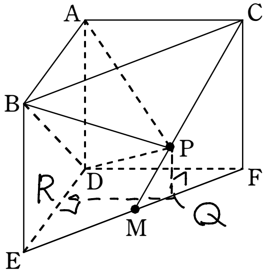
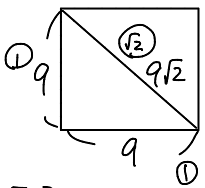


図２



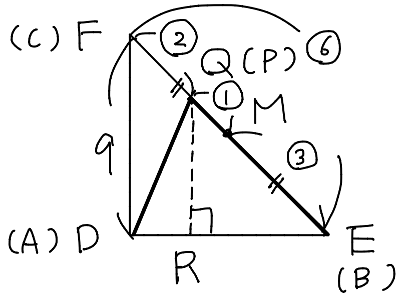
(1)　PがCにいるので ∠BPD ＝∠BCD
を考えて，△BCD の各辺の長さ
を求めることから角度を求めていきたい。

• □ADFC，□ABED は正方形
であり，BD，CD は対角線なので
BD ＝ CD ＝ $9\sqrt{2}$ （45°，45°，90° は $1:1:\sqrt{2}$）



• △ABC は AB＝AC＝9 cm の直角二等辺三角形なので
BC ＝ $9\sqrt{2}$
以上より 3辺の長さが等しいので正三角形
∴ ∠BPD ＝ ∠BCD ＝ 60° //

(2)　立体 P－ABD の体積
$= \triangle ABD \times QR \times \frac{1}{3}$



Point

① どこを底面，高さにするかを明確に。
（空間で考える。）

② 必要な長さを求める。
（平面で考える。）

• △FED ∽ △QER で
FE：QE ＝ FD：QR
⑥：④ ＝ 9：QR
6QR ＝ 36，QR＝6

見やすく比を○数字にします。

• △ABD
$= AB \times AC \times \frac{1}{2}$
$= 9 \times 9 \times \frac{1}{2}$
$= \frac{81}{2}$

以上より　$P-ABD = \triangle ABD \times QR \times \frac{1}{3}$
$= \frac{81}{2} \times 6 \times \frac{1}{3} = 81$ (cm²) //

Point

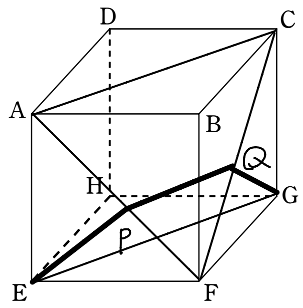
すでに頭の中で解けていてから「手」で解くのが
入試問題です。流れをイメージした段階でほぼGoal。
あとは計算や性質を丁寧に扱って進めていこう。

15 右図のように，1辺が10 cmの立方体ABCD−EFGHがある。この立方体を3点A，C，Fを通る平面で切るとき，次の問いに答えなさい。

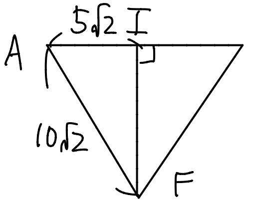
(1) △AFCの面積を求めなさい。

(2) 点Bから△AFCに下ろした垂線の長さを求めなさい。

(3) 点Hを含む立体において，辺AF上に点P，辺CF上に点Qをとるとき，3つの線分の和EP＋PQ＋QGの最小値を求めなさい。



(1)



• △AFCは1辺の長さ$10\sqrt{2}$
(AC＝AF＝CF)の正三角形
なので「高さIF」を求める。

↓

• IはACの中点なので $AI=5\sqrt{2}$

$\therefore IF=\sqrt{(5\sqrt{2})^2+(10\sqrt{2})^2}=5\sqrt{6}$

∴△AFC

$=10\sqrt{2}\times5\sqrt{6}\times\frac{1}{2}$

$=50\sqrt{3}\ (cm^2)$

---

(2)

B−AFCの体積

＝F−ABCの体積

Point

垂線問題は2通りの体積の方程式で解く。

• B−AFC ＝ 底面AFC × 求める高さh × $\frac{1}{3}$

$=50\sqrt{3}\times h\times\frac{1}{3}=\frac{50\sqrt{3}}{3}h$

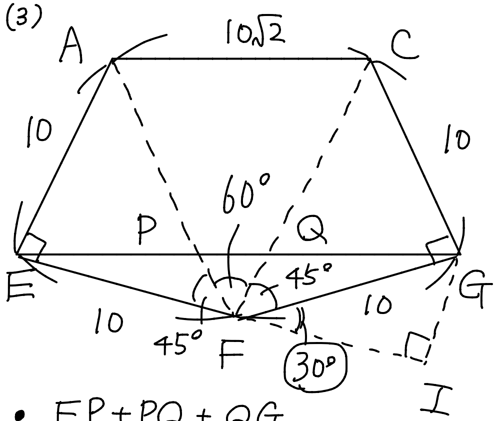
• F−ABC ＝ 底面ABC × 高さBF × $\frac{1}{3}$

$=AB\times BC\times\frac{1}{2}\times10\times\frac{1}{3}=\frac{1000}{6}$

$\therefore \frac{50\sqrt{3}}{3}h=\frac{1000}{6}$ を計算し，$h=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm

---

(3)



Point

最短距離問題は，平面と直線で考える。

• EP＋PQ＋QGの最短距離 ＝ EG

↓

EGを含む直角三角形を作って求める。

↓

• FIとGIを求める。
△FIGは30°, 60°, 90°の直角三角形になる。

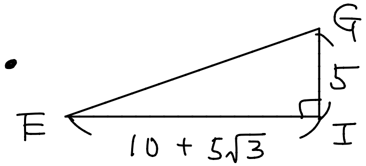
1：2：$\sqrt{3}$の比を用いて

$GI=5$，$FI=5\sqrt{3}$

• △CFG，△AFEは直角二等辺なので
$\angle CFG=45°$，$\angle AFE=45°$

理由

• △AFCは正三角形なので$\angle AFC=60°$

• 

三平方の定理を用いて

$EG^2=(10+5\sqrt{3})^2+5^2$

$=100+100\sqrt{3}+75+25$

$=200+100\sqrt{3}$

$EG=5(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ cm

この計算はできなくてよいです。