

(滝)

)高等学校

H(26)数学

(100点満点 (60)分)

1. 次の問いに答えなさい。

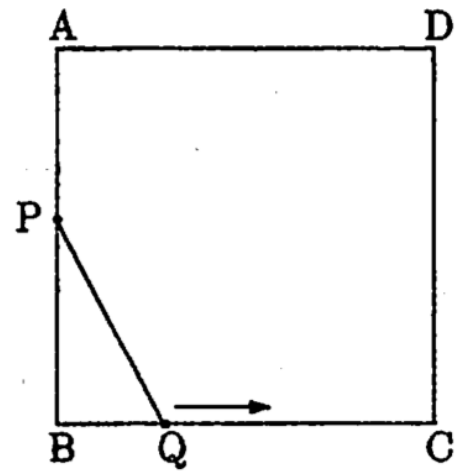
(1) $\frac{2}{3}xy^2 \div \left(-\frac{4}{3}xy\right)^2 \times (-2x^2y^3)$ を計算せよ。

(2) $-\frac{2x-1}{3} + x - 2 - \frac{x-5}{4}$ を計算せよ。

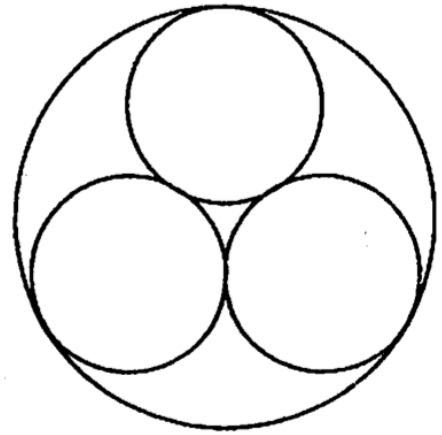
(3) $y-3$ は $x+2$ に比例し、 $x=3$ のとき $y=8$ である。 $x=7$ のとき、 y の値を求めよ。

(4) 連立方程式 $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ ax+y=3 \end{cases}$ が解を持たないとき、定数 a の値を求めよ。

- (5) 図のように、1 辺の長さ 4 の正方形 $ABCD$ があり、点 P は辺 AB 上に固定されている。点 Q が頂点 B から C 、 D 、 A の順に辺上を動くとき、線分 PQ の中点が描く図形の長さを求めよ。



- (6) 半径1の円が3つと、大きい円が図のように接している。このとき、大きい円の半径を求めよ。



2.

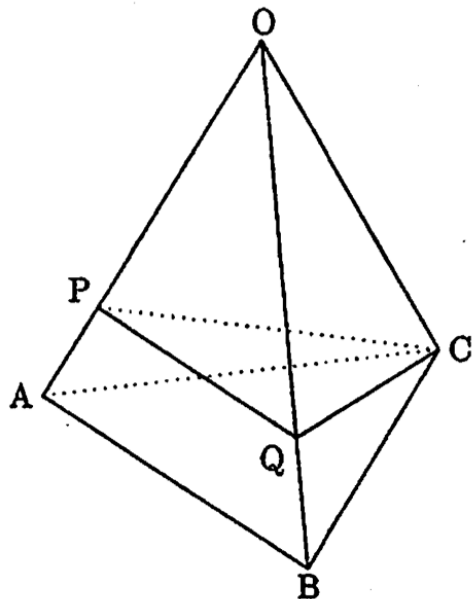
原価 1 個 2000 円の品物を 50 個仕入れて、 $x\%$ の利益を見込んで定価をつけた。はじめの 1 週間は定価で売ったが 30 個しか売れなかったので、その後は定価の $x\%$ 引きの値段で売ったところ、品物はすべて売れた。このとき、利益の合計は 2900 円であった。次の各問いに答えよ。

- (1) 定価を x を用いた式で表せ。
- (2) 値引き後の値段を x を用いた式で表せ。
- (3) x の値を求めよ。

3.

図のように、 $OA=OB=OC=4$ 、 $AB=BC=CA=2$ の正三角錐 $OABC$ がある。辺 OA 、 OB 上にそれぞれ点 P 、点 Q を $OP=OQ=3$ となるようにとる。次の各問いに答えよ。

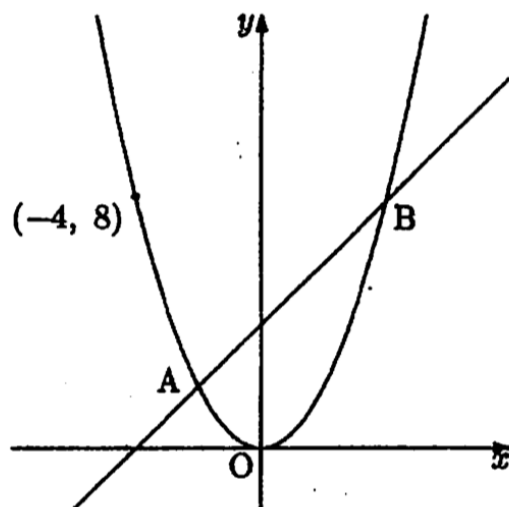
- (1) PQ の長さを求めよ。
- (2) $\triangle ACP$ と相似な三角形を 1 つ答えよ。ただし、合同なものは除く。
- (3) CP の長さを求めよ。
- (4) $\triangle CPQ$ の面積を求めよ。
- (5) 正三角錐 $OABC$ を、3 点 C 、 P 、 Q を通る平面で切ったとき、 O を含む立体を A 、 O を含まない立体を I とする。立体 A と立体 I の体積比を最も簡単な整数比で答えよ。



4.

図のように、点 $(-4, 8)$ を通る放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=x+4$ が、2点A, Bで交わっている。放物線上で2点A, Bの間に点Pをとる。このとき、次の各問いに答えよ。

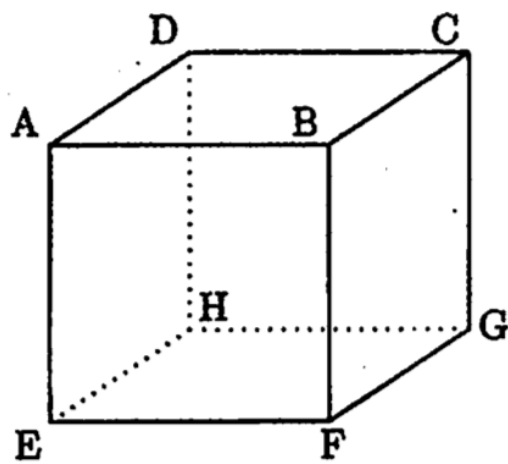
- (1) a の値を求めよ。
- (2) 2点A, Bの座標を求めよ。
- (3) $\triangle OAB$ の面積を求めよ。
- (4) $\triangle PAB$ の面積が $\triangle OAB$ の面積の $\frac{1}{2}$ となるような点Pの x 座標を求めよ。



5.

図のような立方体 $ABCD-EFGH$ がある。点 P はこの立方体の辺上を頂点から頂点へ移動する。1 回の移動で点 P は、辺でつながれた隣の 3 つの頂点のいずれかに移動し、同じ頂点にとどまることはない。次の各問いに答えよ。

- (1) 点 P が頂点 A から移動し始めて、ちょうど 3 回の移動で、初めて頂点 G に到達する行き方は何通りあるか。
- (2) 点 P が頂点 C から移動し始めて、ちょうど 3 回の移動で、初めて頂点 G に到達する行き方は何通りあるか。
- (3) 点 P が頂点 A から移動し始めて、ちょうど 5 回の移動で、初めて頂点 G に到達する行き方は何通りあるか。



(満)

)高等学校

H(26)数学

(100点満点 (60)分)

1. 次の問いに答えなさい。

(1) $\frac{2}{3}xy^2 \div \left(-\frac{4}{3}xy\right)^2 \times (-2x^2y^3)$ を計算せよ。

$$\begin{aligned} &= \frac{2xy^2}{3} \div \frac{16x^2y^2}{9} \times \frac{-2x^2y^3}{1} \\ &= \frac{\cancel{2}xy^{\cancel{2}}}{\cancel{3}} \times \frac{9^{\textcircled{3}}}{16x^2y^{\cancel{2}}} \times \frac{-\cancel{2}x^2y^{\textcircled{3}}}{1} = -\frac{3}{4}xy^3 \end{aligned}$$

(2) $-\frac{2x-1}{3} + x - 2 - \frac{x-5}{4}$ を計算せよ。

$$\begin{aligned} &= -\frac{4(2x-1)}{12} + \frac{12(x-2)}{12} - \frac{3(x-5)}{12} \\ &= \frac{-8x+4+12x-24-3x+15}{12} = \frac{x-5}{12} \end{aligned}$$

(3) $y-3$ は $x+2$ に比例し、 $x=3$ のとき $y=8$ である。 $x=7$ のとき、 y の値を求めよ。

y は x に比例し $\rightarrow y=ax$ これを利用する。

$$y-3 = a(x+2) \quad \text{となり, } x=3, y=8$$

を代入し、 a を求める。

$$8-3 = a(3+2)$$

$$5 = 5a$$

$$1 = a$$

$$y-3 = x+2$$

$$y = x+5$$

$$x=7 \text{ を代入すると}$$

$$y=12$$

(4) 連立方程式 $\begin{cases} 3x+2y=4 & \dots \textcircled{1} \\ ax+y=3 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$ が解を持たないとき、定数 a の値を求めよ。

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2 \\ 3x + 2y = 4 \\ -) 2ax + 2y = 6 \\ \hline (3-2a)x = -2 \\ x = \frac{-2}{3-2a} \end{array}$$

解を持たない ので
分母の $3-2a$ が 0
となればよい。

$$\begin{array}{l} 3-2a=0 \\ a=\frac{3}{2} \\ \hline \end{array} //$$

(別アプローチ)

$$\textcircled{1} \dots y = -\frac{3}{2}x + 2$$

$$\textcircled{2} \dots y = -ax + 3$$

のグラフに注目。

2本のグラフの交点が

解 となるので、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$

が平行 なら 交点

をもつことはできない。

ゆえに $a = \frac{3}{2}$ のとき

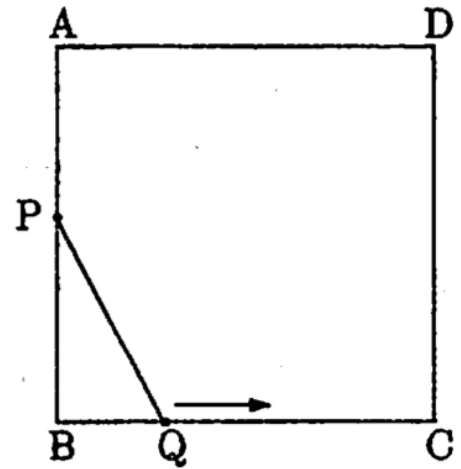
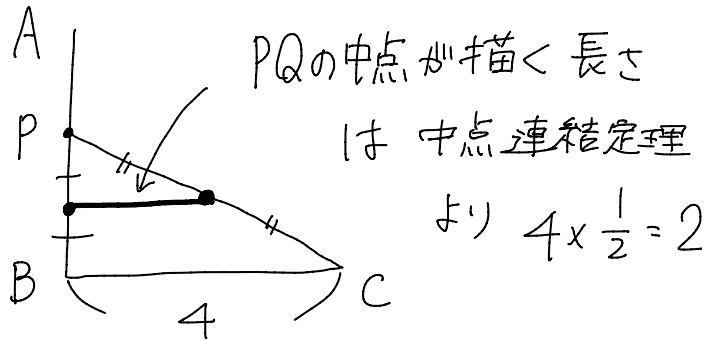
2本のグラフは平行

となり、解を持たない。

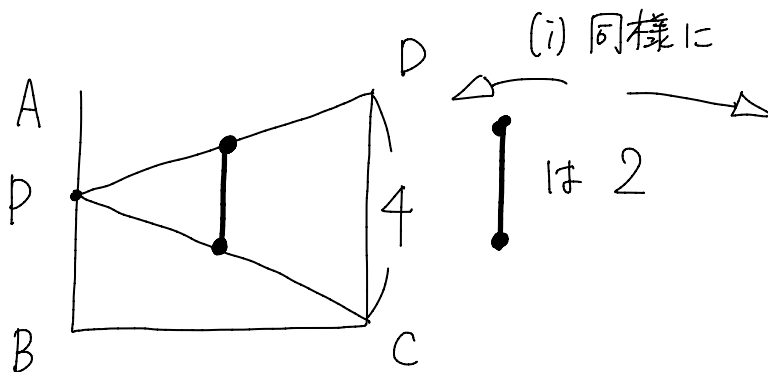
連立方程式の解 = 2つのグラフの
交点の座標

- (5) 図のように、1 辺の長さ 4 の正方形 ABCD があり、点 P は辺 AB 上に固定されている。点 Q が頂点 B から C、D、A の順に辺上を動くとき、線分 PQ の中点が描く図形の長さを求めよ。

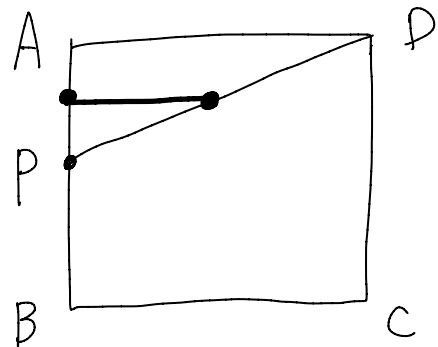
(i) Q が BC 上にあるとき



(ii) Q が CD 上にあるとき



(iii) Q が AD 上にあるとき

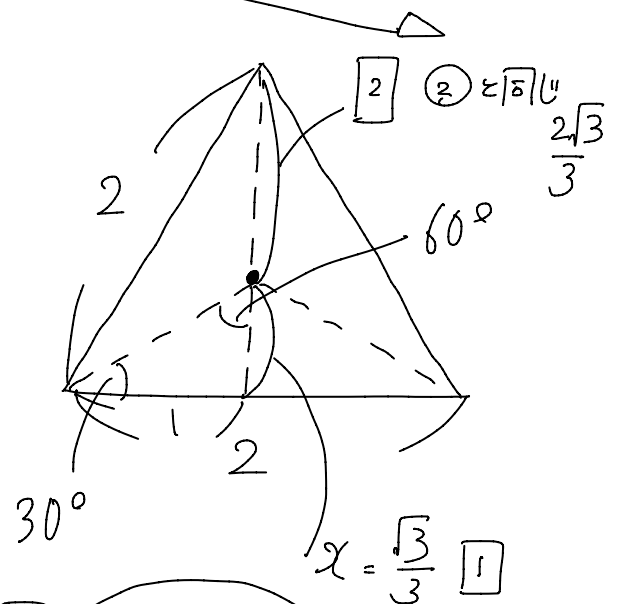
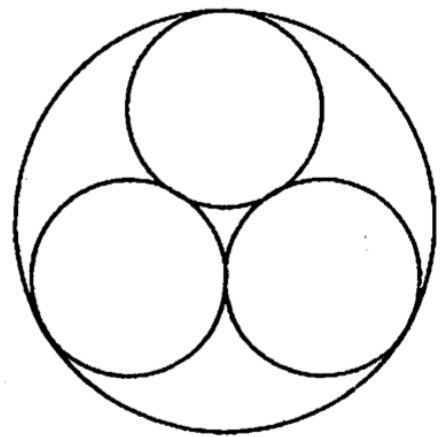
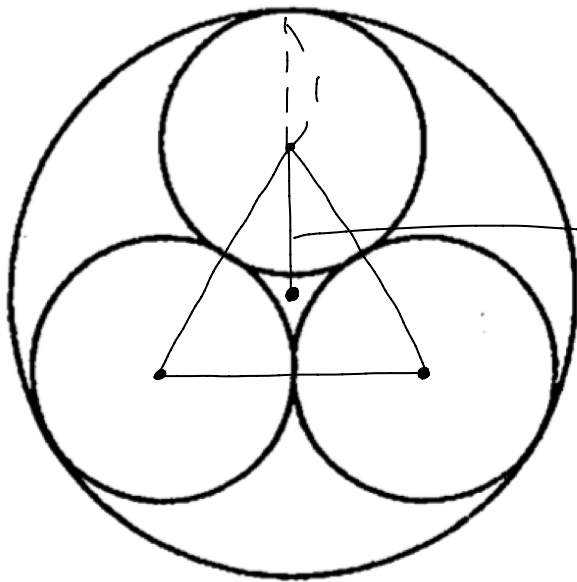


以上から $2 \times 3 = 6$
——— //

P の位置はどこにある？ と 気になりますか

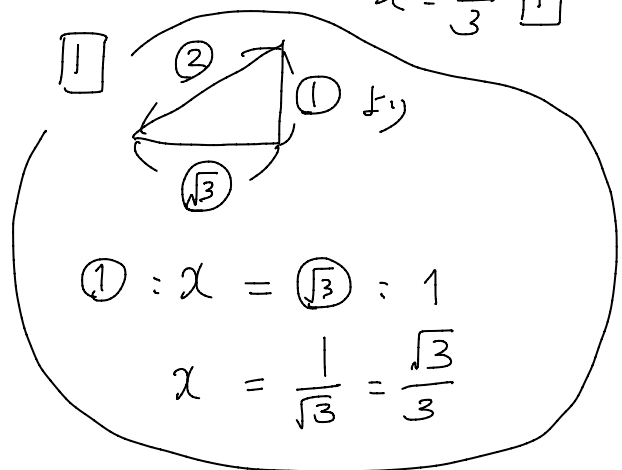
問題文に情報がないので P は自由においてよい
ことになります。実際に図をかくと 長さが半分に
なる 中点連結定理 にっかかりやすいです。

- (6) 半径1の円が3つと、大きい円が図のように接している。このとき、大きい円の半径を求めよ。



① → ② の流れで
考えます。

$$1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



$$\begin{aligned} \textcircled{1} : \alpha &= \textcircled{\sqrt{3}} : 1 \\ \alpha &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

2.

原価1個2000円の品物を50個仕入れて、 $x\%$ の利益を見込んで定価をつけた。はじめの1週間は定価で売ったが30個しか売れなかったため、その後は定価の $x\%$ 引きの値段で売ったところ、品物はすべて売れた。このとき、利益の合計は2900円であった。次の各問いに答えよ。

- (1) 定価を x を用いた式で表せ。
- (2) 値引き後の値段を x を用いた式で表せ。
- (3) x の値を求めよ。

$$(1) \quad 2000\text{円} + 2000\text{円} \text{ の } x\% = \text{定価}$$

$$2000 + 2000 \times \frac{x}{100} = 2000 + 20x //$$

$$(2) \quad \text{定価} - \text{定価の } x\%$$

$$= (2000 + 20x) - (2000 + 20x) \times \frac{x}{100}$$

$$= 2000 - \frac{x^2}{5} //$$

$$(3) \quad \left(\underset{\substack{\uparrow \\ (1) \text{ の式}}}{\text{定価}} \times 30 \right) + \left(\underset{\substack{\uparrow \\ (2) \text{ の式}}}{\text{値引き後}} \times 20 \right) - \left(\overset{\text{仕入れ値}}{2000 \times 50} \right) = \overset{\text{利益}}{2900}$$

$$(2000 + 20x) \times 30 + \left(2000 - \frac{x^2}{5} \right) \times 20 - 100000 = 2900$$

$$60000 + 600x + 40000 - 4x^2 - 100000 = 2900$$

$$4x^2 - 600x + 2900 = 0$$

$$x^2 - 150x + 725 = 0$$

$$(x - 5)(x - 145) = 0$$

$$x = 5, 145$$

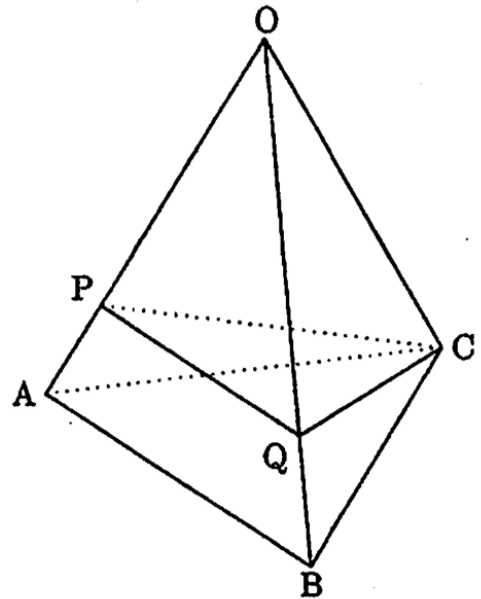
145% は現実的ではないので

$$\underline{\underline{5\%}}$$

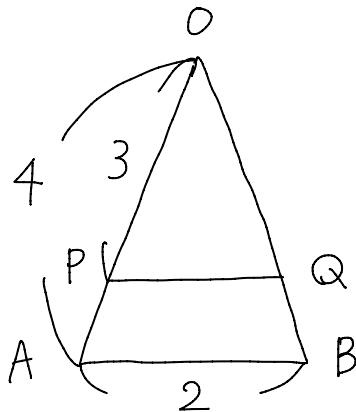
3.

図のように、 $OA=OB=OC=4$ 、 $AB=BC=CA=2$ の正三角錐 $OABC$ がある。辺 OA 、 OB 上にそれぞれ点 P 、点 Q を $OP=OQ=3$ となるようにとる。次の各問いに答えよ。

- (1) PQ の長さを求めよ。
- (2) $\triangle ACP$ と相似な三角形を1つ答えよ。ただし、合同なものは除く。
- (3) CP の長さを求めよ。
- (4) $\triangle CPQ$ の面積を求めよ。
- (5) 正三角錐 $OABC$ を、3点 C 、 P 、 Q を通る平面で切ったとき、 O を含む立体を A 、 O を含まない立体を I とする。立体 A と立体 I の体積比を最も簡単な整数比で答えよ。



(1) PQ を含む平面で考える。



$\triangle OPQ \sim \triangle OAB$ において

$$OA:OP = AB:PQ$$

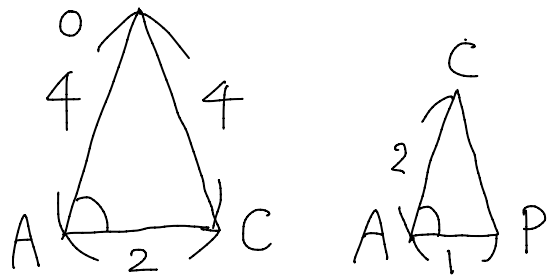
$$4:3 = 2:PQ$$

$$4PQ = 6$$

$$PQ = \frac{3}{2}$$

〃

(2)



$$\triangle ACP \sim \triangle AOC \sim \triangle AOB \\ \sim \triangle BOC \sim \triangle POQ$$

(3) (2) の 2 つの 三角形 を 用 いる。

$$OA:CA = OC:CP$$

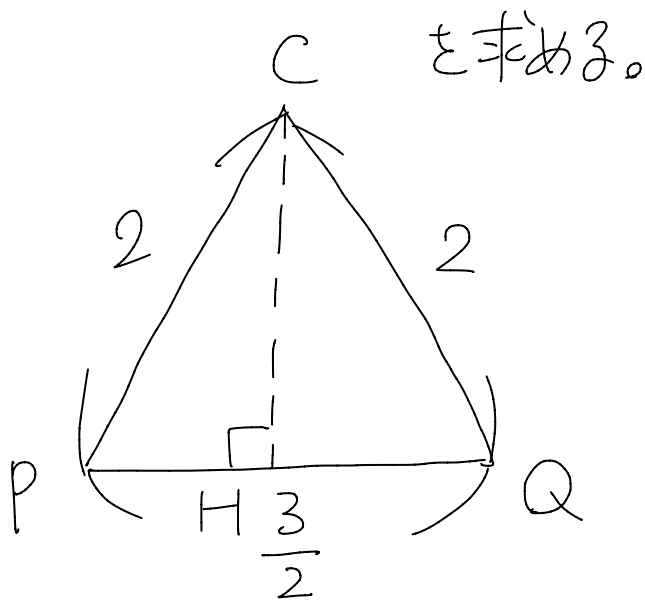
$$4:2 = 4:CP$$

$$CP = 2$$

〃

(4) $\triangle CPQ$ の面積

$\triangle CPQ$ を図に示し、高さ CH



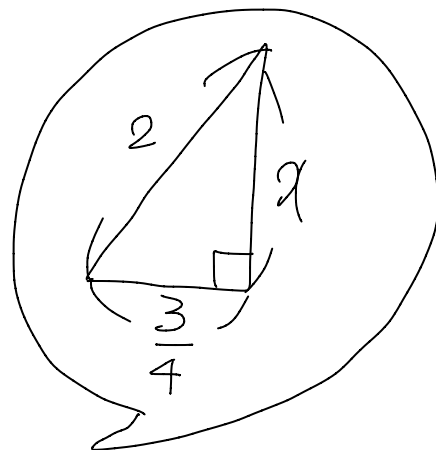
$$PH = \frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

三平方の定理より

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 2^2$$

$$x^2 + \frac{9}{16} = 4$$

$$x^2 = \frac{64}{16} - \frac{9}{16} = \frac{55}{16}$$



$$x = \frac{\sqrt{55}}{4}$$

$$\therefore \triangle CPQ = PQ \times CH \times \frac{1}{2}$$

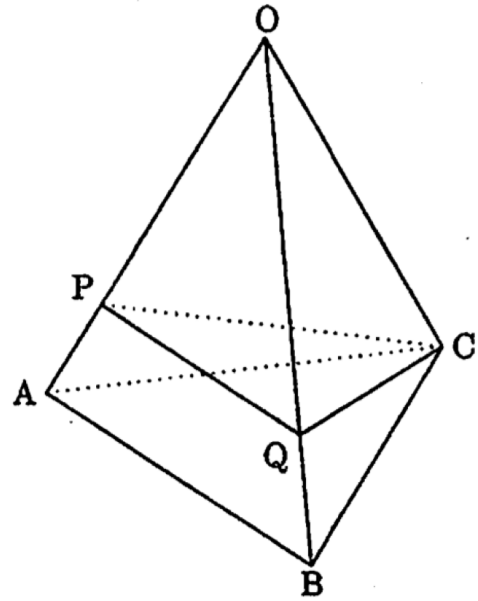
$$= \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{55}}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{55}}{16}$$

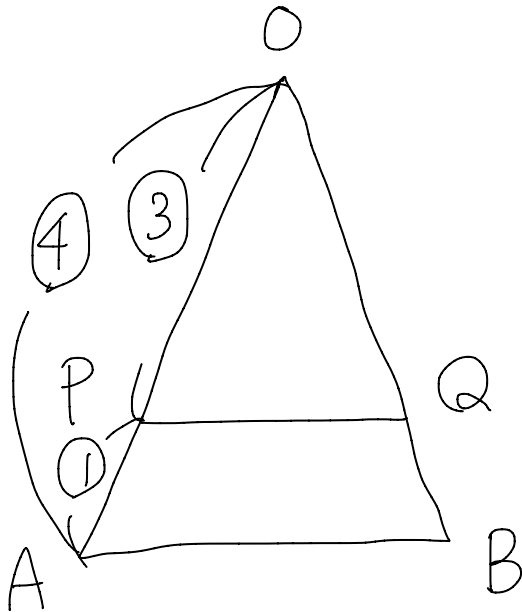
//

- (5) 正三角錐 $OABC$ を、3点 C, P, Q を通る平面で切ったとき、 O を含む立体を A 、 O を含まない立体を I とする。立体 A と立体 I の体積比を最も簡単な整数比で答えよ。

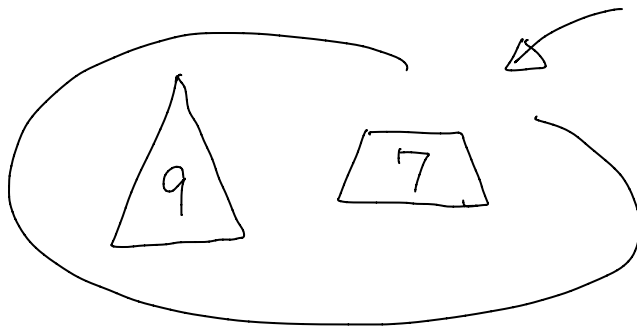
立体	底面	高さ
A	$\triangle OPQ$	C と $\triangle OAB$ の キヨリ
I	$\square APQB$	



- 高さが A, I どちらに対しても等しいので、体積比は底面積比に等しくなる。



$\triangle OAB \sim \triangle OPQ$
 の相似比は
 $4:3$ なので面積比は
 $4^2:3^2 = 16:9$
 よって $16-9=7$
 が $\square APQB$ の面積比



$9:7$

——— //

-
- A Cartesian coordinate system showing a parabola opening upwards with its vertex at the origin O . A straight line with a positive slope intersects the parabola at two points, A and B . Point A is located in the third quadrant, and point B is in the first quadrant. The coordinates of point A are given as $(-4, 8)$. The equation of the line is given as $y = x + 4$.

(1) $y = ax^2$ は $(-4, 8)$ を通るから
 $x = -4, y = 8$ を代入すると、
 $8 = a \times (-4)^2 \quad a = \frac{1}{2}$

- (2) 2つのグラフの交点は連立方程式を解いて求まる。

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = x + 4 \end{cases} \quad \downarrow \text{代} \quad \begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 &= x + 4 & (x-4)(x+2) &= 0 \\ x^2 &= 2x - 8 = 0 & x &= 4, -2 \end{aligned}$$

$A(-2, 2) \quad B(4, 8)$

$\triangle OAB$ を等積変形
すると $\triangle CA'B'$
になる。

ABの式からC
の座標を求める。

$$\text{傾き} = \frac{8-2}{4-(-2)}$$

11

$$y = x + b$$

$$f = 4 + b$$

$$4 = \phi$$

$$C(0,4)$$

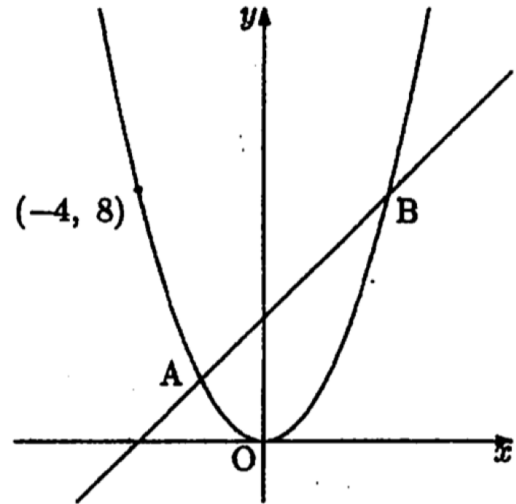
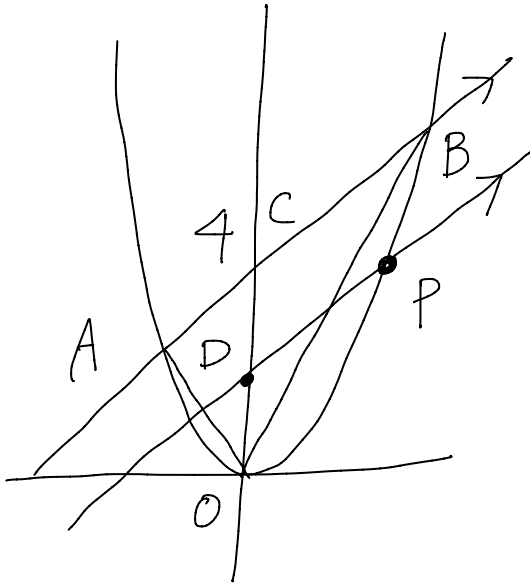
$$A'B' = 6$$

(3) $\triangle OAB$

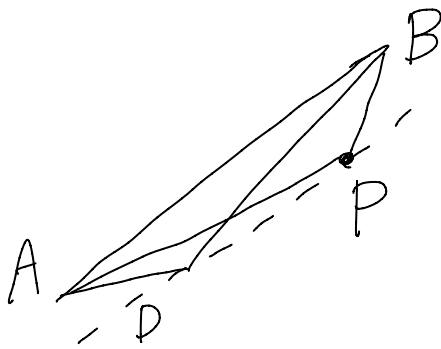
A hand-drawn coordinate plane with x and y axes. The origin is labeled O. The x-axis has points A' and B' marked, with coordinates $(-2, 0)$ and $(4, 0)$ written below them. The y-axis has a point C marked. A line segment connects A' and B'. A line segment connects O and C. A line segment connects A' and B. A line segment connects O and A. A line segment connects B and C. A line segment connects A' and C. A line segment connects B' and C. A line segment connects A' and B'.

$$\triangle OAB = \triangle CA'B' = 6 \times 4 \times \frac{1}{2} = 12 //$$

- (4) $\triangle PAB$ の面積が $\triangle OAB$ の面積の $\frac{1}{2}$ となるような点 P の x 座標を求めよ。



$\triangle OAB$ において OC の中点となる D をとると面積が半分の $\triangle PAB$ となる。



AB の平行線を D から引き $y = \frac{1}{2}x^2$ との交点をとると、等積変形でき、 $\triangle PAB$ ができあがる。

$P(0, 2)$ を通り傾きが 1 の AB と平行な直線

$$DP: y = x + 2 \text{ となる}$$

$y = \frac{1}{2}x^2$ との交点を求める。

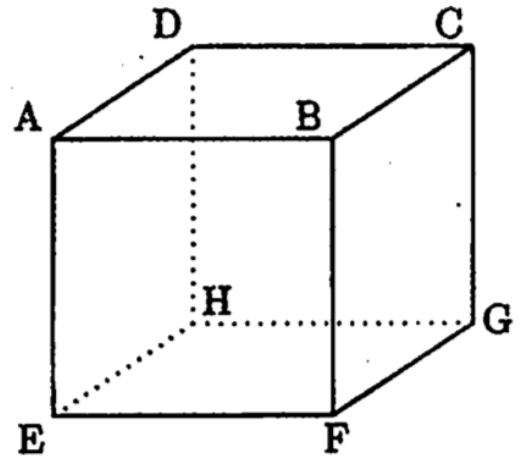
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 = x + 2 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{5}$$

5.

図のような立方体 ABCD-EFGH がある。点 P はこの立方体の辺上を頂点から頂点へ移動する。1 回の移動で点 P は、辺でつながれた隣の 3 つの頂点のいずれかに移動し、同じ頂点にとどまることはない。次の各問いに答えよ。

- (1) 点 P が頂点 A から移動し始めて、ちょうど 3 回の移動で、初めて頂点 G に到達する行き方は何通りあるか。
- (2) 点 P が頂点 C から移動し始めて、ちょうど 3 回の移動で、初めて頂点 G に到達する行き方は何通りあるか。
- (3) 点 P が頂点 A から移動し始めて、ちょうど 5 回の移動で、初めて頂点 G に到達する行き方は何通りあるか。



(1) $A \rightarrow \textcircled{B} \rightarrow C \rightarrow G$ の 2 通り
 $\swarrow \searrow$
 F
 B 以外に D, E が
 あるので
 $2 \times 3 = 6$ (B, D, E の 3 通り)
 6 通り //

(2) $C \rightarrow \textcircled{B} \rightarrow F \rightarrow G$ の 2 通り
 $\swarrow \searrow$
 C
 B 以外に D が あるので
 $2 \times 2 = 4$
 4 通り //

$A \rightarrow D$
 $\swarrow \searrow$
 $C \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow G$
 $\searrow \swarrow$
 $B \rightarrow C \rightarrow F$
 $\searrow$
 H も 4 通り
 A は (1) の 6 通り
 14 通り

(3) 2 番目に移動できるのは、
 D, B, E の 3 通り
 なので $A \rightarrow D \rightarrow$
 このパターンを考える。

$$14 \times 3 = 42$$

42 通り //