(中京大学附属中京)高等学校　　H(28)数学

（１００点満点　（40）分）

１．次の問いに答えなさい。

次の $\boxed{}$ に当てはまる適切な数を選び，マークせよ。

(1)　$-60\div\{-2^2\times(-3)^2\div(-6)\}=-\boxed{1}\,\boxed{2}$ である。

(2)　$\dfrac{3x-y}{2}-\dfrac{x+2y}{3}-2x=\dfrac{-\boxed{3}\,x-\boxed{4}\,y}{\boxed{5}}$ である。

(3) $4x^2-8xy+4y^2-4x+4y+1$ を因数分解すると $(\boxed{6}x-\boxed{7}y-\boxed{8})^2$ である。

(4) $\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{8}}+(\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}-2)=-\boxed{9}+\boxed{10}\sqrt{\boxed{11}}$ である。

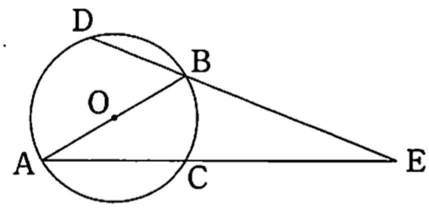
(5) a, b を１桁の自然数とするとき，$\sqrt{\dfrac{54b}{a}}$ が自然数となる（a, b）の組は $\boxed{12}$ 組である。

(6) 双曲線 $y=\dfrac{a}{x}$（a は比例定数）上に２点A，Bをとる。点Aの座標が（2，6），点Bの y 座標が－４であるとき，直線ABの式は $y=\boxed{13}x+\boxed{14}$ である。

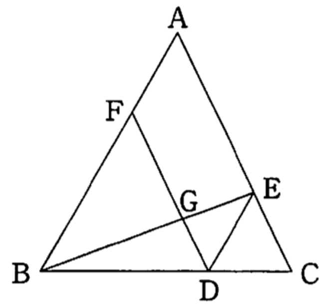
(7) 大小2個のさいころを同時に投げるとき，目の和が5の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{15}}{\boxed{16}\boxed{17}}$ である。

(8) 1000円で仕入れた品物を500円の利益を見込んで定価をつけたが，大売り出しのとき定価の x %引きで売ったので，利益が仕入れ値の29%であった。このとき，x の値は $\boxed{18}\ \boxed{19}$ である。ただし，消費税は考えないものとする。

(9) 右の図のように線分ABを直径とする円Oの周上に２点C，Dをとり，線分ACの延長線と線分DBの延長線との交点をEとする。
$\overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{CB} : \overset{\frown}{BD} = 3 : 2 : 2$とするとき，
∠BEC＝ $\boxed{20}\ \boxed{21}$ °である。



(10) 右の図のように△ABCの辺BC，CA，AB上にそれぞれ点D，E，FをAB // ED，AC // FDとなるようにとり，線分BEと線分DFの交点をGとする。 AE：EC＝２：１であるとき，△ABCと△GBDの面積の比を最も簡単な整数の比で表すと $\boxed{22}\ \boxed{23} : \boxed{24}$ である。

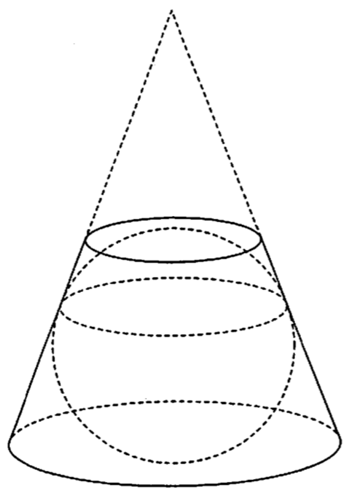


2.

右の図の立体は，底面の半径が９の円錐を底面に平行な平面で切り，小さな円錐を取り除き，この立体にちょうど入る球（立体の底面，側面，切り口の面それぞれと接する球）を入れたものである。切り口の円の半径を４とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　この球の体積を求めよ。$\boxed{\text{A}}$

(2)　この立体の側面積を求めよ。$\boxed{\text{B}}$

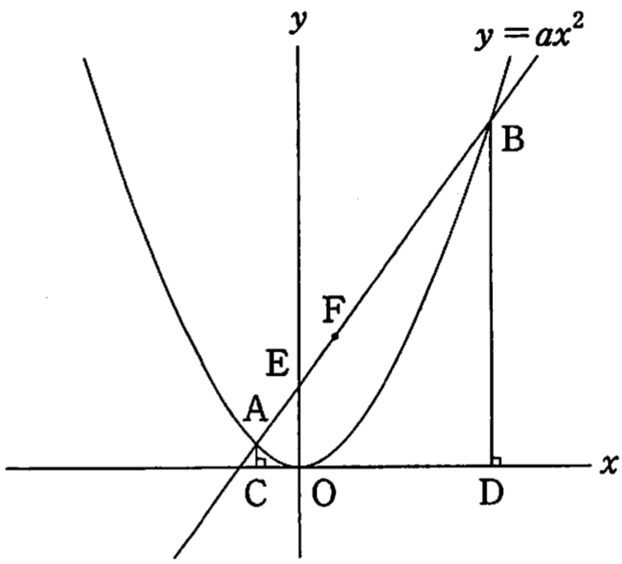


3.

右の図のように放物線 $y=ax^2$ $(a>0)$ 上に x 座標がそれぞれ－1，5である点A，Bをとり，点Aから x 軸に垂線AC，点Bから x 軸に垂線BDを引く。直線ABと y 軸との交点をEとし，線分AB上にAF：FB＝1：2となる点Fをとる。四角形ACDBの面積を52とするとき，次の問いに答えよ。

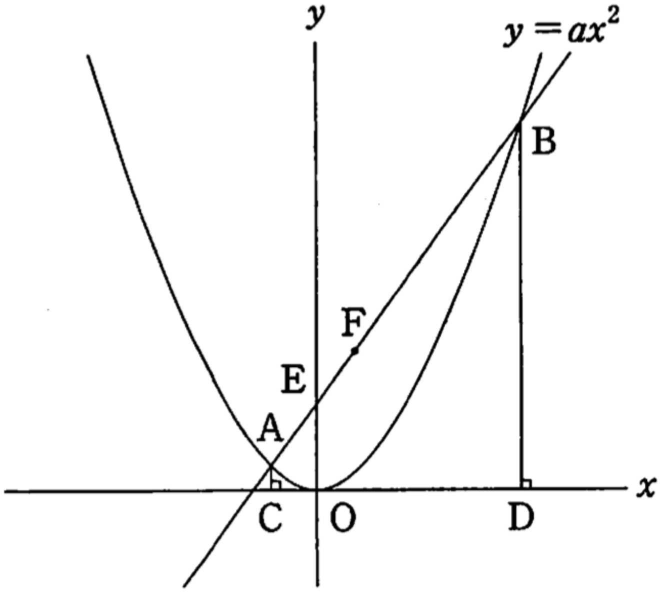
(1) a の値を求めよ。$\boxed{\text{C}}$

(2) 点Fを通り，四角形ACDBの面積を2等分する直線の式を求めよ。$\boxed{\text{D}}$



(3) 点Gの座標を $\left(-8,\ \frac{19}{3}\right)$ とし，△AEGを直線ABを回転の軸として１回転させてできる立体の体積を求めよ。 $\boxed{\text{E}}$

（解答欄に途中計算や考え方を書き，答えを求めよ`



(中京大学附属中京)高等学校　　H(28)数学

（１００点満点　（40 ）分）

１．次の問いに答えなさい。

次の $\boxed{}$ に当てはまる適切な数を選び，マークせよ。

(1)　$-60 \div \{-2^2 \times (-3)^2 \div (-6)\} = -\boxed{1}\boxed{2}$ である。

$= -60 \div \{\underline{-4 \times 9} \div (-6)\}$

$= -60 \div \{\underline{-36} \div (-6)\}$

$= -60 \div 6$

$= -10$

$-a^2 = -(a \times a)$

$(-a)^2 = (-a) \times (-a)$

(2)　$\dfrac{3x-y}{2} - \dfrac{x+2y}{3} - 2x = \dfrac{-\boxed{3}x - \boxed{4}y}{\boxed{5}}$ である。

$= \dfrac{3(3x-y)}{6} - \dfrac{2(x+2y)}{6} - \dfrac{6 \times 2x}{6}$

$= \dfrac{9x - 3y - 2x - 4y - 12x}{6}$

$= \dfrac{-5x - 7y}{6}$

分数の前の
マイナス
の扱いで
ミスが
起きやすい

(3) $4x^2-8xy+4y^2-4x+4y+1$ を因数分解すると（ $\boxed{6}x-\boxed{7}y-\boxed{8}$ $)^2$ である。

今回は，解の形が $(ax-by-c)^2$ となっているので

$a=2$，$c=1$ はすぐにわかる。

$(2x-by+1)^2=(2x-by+1)(2x-by+1)$

$=4x^2\underset{\sim\sim\sim}{-2bxy}+2x\underset{\sim\sim\sim}{-2bxy}+b^2y^2-by$

$+2x-by+1$

xyの係数に着目すると

$-4bxy=-8xy$

$b=2$ となる。

$(2x-2y-1)^2$ //

(4) $\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{8}}+(\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}-2)=-\boxed{9}+\boxed{10}\sqrt{\boxed{11}}$ である。

$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ となるので約分できる

$=\sqrt{12}+3-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-10$

$=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-7$

$=-7+5\sqrt{3}$ //

$\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\dfrac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{3}$ としてもできます。

$(\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}-2)$ の計算

$(x+5)(x-2)$ 同様に

たして 3，かけて -10 なので

$x^2+3x-10$ をイメージして

解いてもできます。

$(\sqrt{3})^2+3\times\sqrt{3}-10$

$3+3\sqrt{3}-10$

が。不安なときは

分配法則で解こう。

(5) a, b を1桁の自然数とするとき，$\sqrt{\dfrac{54b}{a}}$ が自然数となる $(a,\ b)$ の組は $\boxed{12}$ 組である。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 54 \\ 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ & 3 \end{array}$$

$\sqrt{\dfrac{2\times3\times3^2\times b}{a}}$ が自然数になるので

まずは分母 a を設定してから当てはまる b を考えていく。

(I) $a=1$ のとき

$\sqrt{2\times3\times3^2\times b}$

$b=2\times3=6$

(II) $a=2$ のとき

$\sqrt{\dfrac{\cancel{2}\times3\times3^2\times b}{\cancel{2}}}$ $b=3$

(III) $a=3$ のとき

$\sqrt{\dfrac{2\times\cancel{3}\times3^2\times b}{\cancel{3}}}$

$b=2,\ 2^3(8)$

(IV) $a=4$ のとき

$\sqrt{\dfrac{\cancel{2}\times3\times3^2\times b}{\cancel{4}\ 2}}$

$b=2\times3=6$

分母の2を約分するための2

$b=6$ や $b=3$ 以外は？

$\sqrt{\ }$ が外れる数は

次は $\bigcirc^2$ でないとダメ

なので

$b=6$ の次は $b=6\times2^2$

となるが $b=24$ となり×

(II) のときも $b=3\times2^2$

$=12$ で×

重要

(V) $a=5$

$\sqrt{\dfrac{2\times3\times3^2\times b}{5}}$

$b=5\times2\times3$

$=30$ ×

(VI) $a=6$

$\sqrt{\dfrac{\cancel{2}\times\cancel{3}\times3^2\times b}{\cancel{2}\times\cancel{3}}}$

$b=2^2(4),\ 3^2(9),\ 1$

(VII) $a=7$

$\sqrt{\dfrac{2\times3\times3^2\times b}{7}}$

$b=7\times2\times3$

$=42$ ×

(VIII) $a=8$

$\sqrt{\dfrac{\cancel{2}\times3\times3^2\times b}{\cancel{2}\times2\times2}}$

$b=2^2\times3=12$ ×

分母の2×2を約分

(IX) $a=9$

$\sqrt{\dfrac{2\times3\times\cancel{3^2}\times b}{\cancel{3}\times\cancel{3}}}$

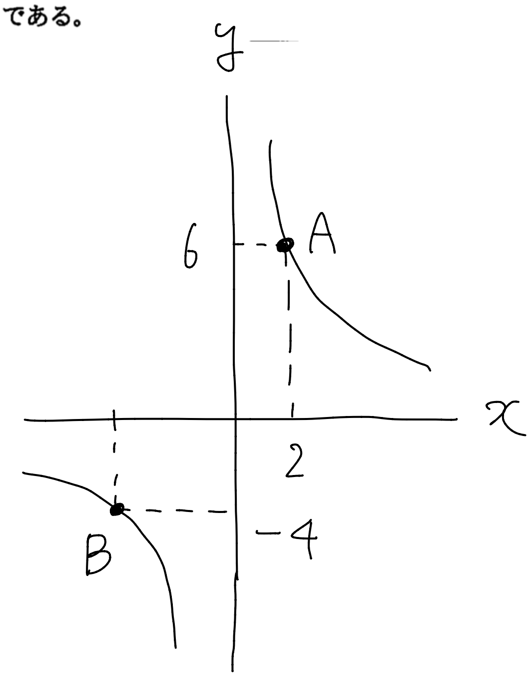
$b=2\times3=6$

以上より $(a,b)=(1,6),(2,3),(3,2),(3,8)$

$(4,6),(6,1),(6,4),(6,9),(9,6)$

の 9通り //

(6) 双曲線 $y=\frac{a}{x}$ (a は比例定数) 上に2点A，Bをとる。点Aの座標が (2，6)，点Bの y 座標が -4 であるとき，直線ABの式は $y=$ $\boxed{13}$ $x+$ $\boxed{14}$ である。



• $y=\frac{a}{x}$ の式を求める。

A(2, 6) を通るので $y=\frac{a}{x}$ に

$x=2$, $y=6$ を代入すると

$6=\frac{a}{2} \longrightarrow a=12$

よって $y=\frac{12}{x}$

• Bの座標を求める。

$y=\frac{12}{x}$ で Bのy座標は

-4 なので $-4=\frac{12}{x}$

$x=-3$ よって B$(-3, -4)$

• ABの式を求める。

$A(\underbrace{2}_{-5}, \overbrace{6}^{-10})$ $B(-3, -4)$

傾き $=\frac{-10}{-5}=2$

$y=2x+b$ となり

(2, 6) を通るので

$6=2\times2+b$ $b=2$

$y=2x+2$

Point

関数の問題は

図をかくと考えやすい

(7) 大小２個のさいころを同時に投げるとき，目の和が５の倍数になる確率は $\dfrac{\boxed{15}}{\boxed{16}\boxed{17}}$ である。

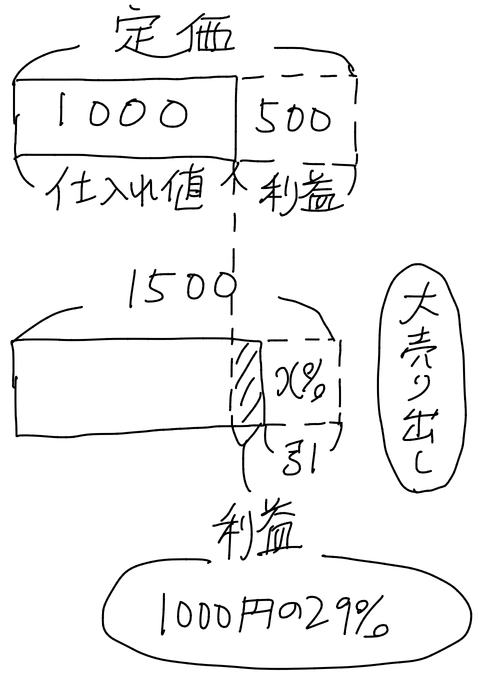
小＼大	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\dfrac{7}{36}$ //

Point

表をかくとほとんどの場合，対角線で対称になるので見落しづらい。

(8) 1000円で仕入れた品物を500円の利益を見込んで定価をつけたが，大売り出しのとき定価の x %引きで売ったので，利益が仕入れ値の29%であった。このとき，x の値は $\boxed{18}\boxed{19}$ である。ただし，消費税は考えないものとする。



大売り出しのときの利益

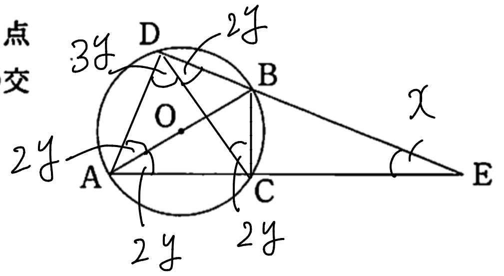
$$\underbrace{1500-\left(1500\times\frac{x}{100}\right)-1000}=1000\times\frac{29}{100}$$

$$500-15x=290$$

$$210=15x$$

$$x=14 \quad 14\%$$ //

(9) 右の図のように線分ABを直径とする円Oの周上に２点C，Dをとり，線分ACの延長線と線分DBの延長線との交点をEとする。
$\overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{CB}:\overset{\frown}{BD}=3:2:2$ とするとき，
$\angle BEC=$ $\boxed{20}\boxed{21}$ °である。



弧の比は円周角の比に等しくなるので

$\overset{\frown}{CB}$ の円周角 $=2y$ とおくと

$\overset{\frown}{AC}$ 〃 $=3y$ 　　となる。

$\overset{\frown}{BD}$ 〃 $=2y$

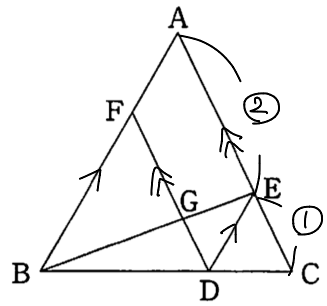
$\boxed{1}$ $\angle ADB=90°$
となるので
$3y+2y=90°$
$y=18°$

$\boxed{2}$ $\angle DBA=180-5y-2y$
$=180-7y$
$=54°$

$\boxed{3}$ △ABEにおいて外角の性質より

$\angle x+2y=54°$ 　 $\angle x=18°$ //

(10) 右の図のように△ABCの辺BC，CA，AB上にそれぞれ点D，E，FをAB // ED，AC // FDとなるようにとり，線分BEと線分DFの交点をGとする。 AE：EC＝２：１であるとき，△ABCと△GBDの面積の比を最も簡単な整数の比で表すと $\boxed{22}\boxed{23}:\boxed{24}$ である。



△ABCにおいて底辺ACで

AE : EC = 2 : 1 なので

$\triangle ABE=\frac{2}{3}\times\triangle ABC$ …①

CE : EA = 1 : 2
なので

CE : CA = 1 : 3
= AB : ED

ED = AF なので

BF : BA = 2 : 3

よって　　となる。

$\triangle FBG=\frac{4}{9}\times\triangle ABE$
…②

ED : FB = 1 : 2 より

GD : FG = 1 : 2 なので

$\triangle GBD=\frac{1}{2}\times\triangle FBG$ …③

①〜③より

$\triangle GBD=\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}}_{}\times\triangle ABC$ 　 $\frac{4}{27}$

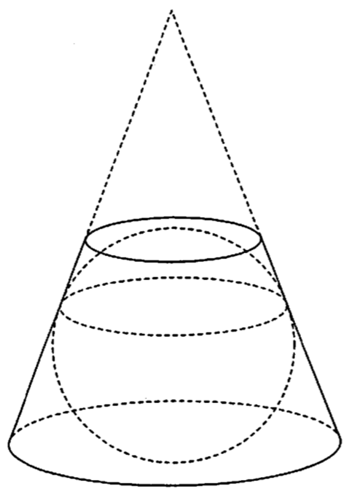
27 : 4 //

2.

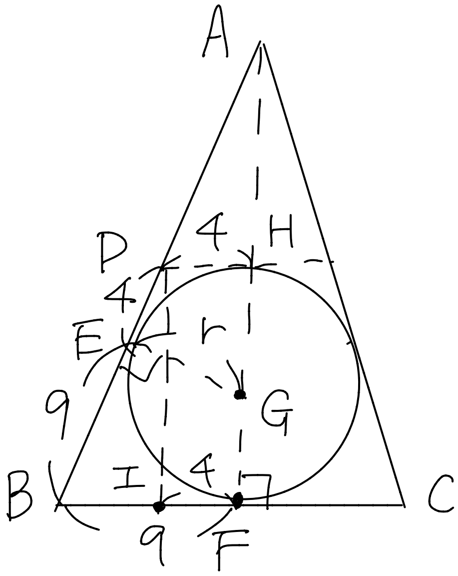
右の図の立体は，底面の半径が９の円錐を底面に平行な平面で切り，小さな円錐を取り除き，この立体にちょうど入る球（立体の底面，側面，切り口の面それぞれと接する球）を入れたものである。切り口の円の半径を４とするとき，次の問いに答えよ。

(1) この球の体積を求めよ。 $\boxed{A}$

(2) この立体の側面積を求めよ。 $\boxed{B}$



(1) 円錐の頂点と底面の円の中心を通る平面で考える。球の半径を r とする。



円の外部の点から円への接線の長さは等しいので左図のように

DE = 4, EB = 9 となる。

DからBCへの垂線とBCとの交点をIとするとDH = IF = 4

となり △DBI が 13, 2r, 5 の直角三角形となる。

よって 2r = 12　r = 6

$\frac{4}{3}\pi \times 6^3$

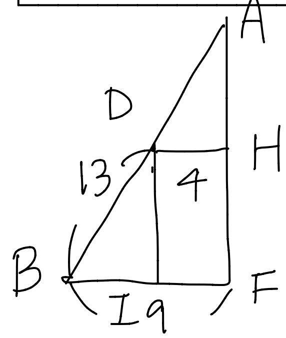
$= 288\pi$

(2)

$\boxed{\text{おうぎ形の面積} = \frac{1}{2} \times \text{弧} \times \text{半径}}$

求める側面積

$\boxed{\frac{1}{2} \times 2\pi \times AB \times BF - \frac{1}{2} \times 2\pi \times AD \times DH}$



$9 : AB = 4 : AB - 13$

$4AB = 9AB - 117$

$AB = \frac{117}{5}$

$\frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{117}{5} \times 9 - \frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{52}{5} \times 4$

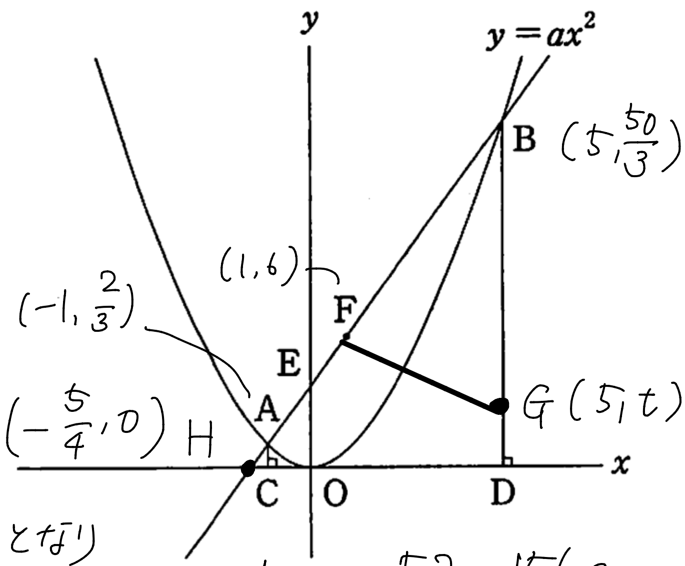
$= 169\pi$

3.

右の図のように放物線 $y=ax^2$ $(a>0)$ 上に x 座標がそれぞれ -1，5である点A，Bをとり，点Aから x 軸に垂線AC，点Bから x 軸に垂線BDを引く。直線ABと y 軸との交点をEとし，線分AB上にAF：FB＝1：2となる点Fをとる。四角形ACDBの面積を52とするとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。$\boxed{\text{C}}$

(2) 点Fを通り，四角形ACDBの面積を２等分する直線の式を求めよ。$\boxed{\text{D}}$



(1) A$(-1, a)$ B$(5, 25a)$ となり

$\square ACDB = 52 = (a+25a)\times 6\times\frac{1}{2}$

$52 = 156a$

$\underline{a = \frac{2}{3}}$ //

---

(2) A$\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ B$\left(5, \frac{50}{3}\right)$ となり AF：FB＝1：2より

$F\left(\frac{5-(-1)}{3}-1,\ \frac{\frac{50}{3}-\frac{2}{3}}{3}+\frac{2}{3}\right)=F(1,6)$

$\triangle FDB = \frac{50}{3}\times 4\times\frac{1}{2} = \frac{100}{3} = \frac{200}{6} > \frac{52}{2} = \frac{156}{6}$

よって求める直線はBD上にある（点をG$(5,t)$とする）

$\triangle FGB = \left(\frac{50}{3}-t\right)\times 4\times\frac{1}{2} = \frac{52}{2}$ $\quad t=\frac{11}{3}$

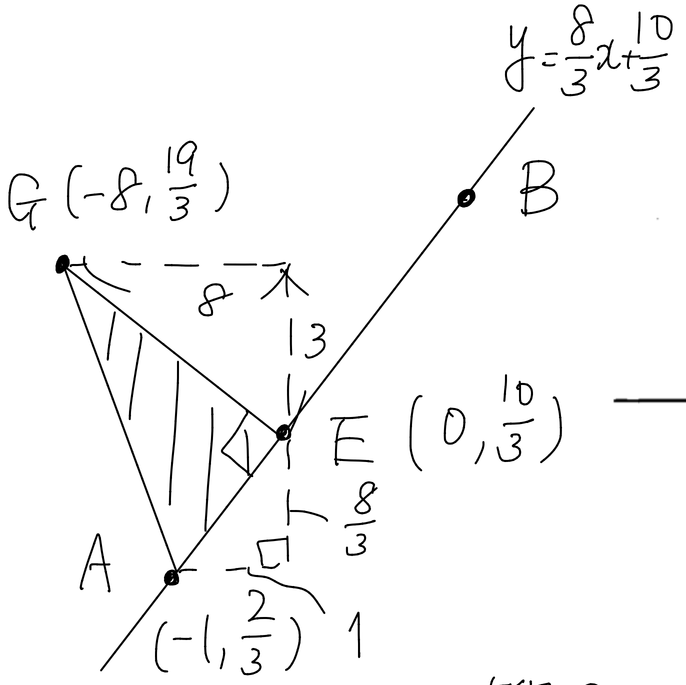
G$\left(5, \frac{11}{3}\right)$，F$(1, 6)$ の直線を求める。

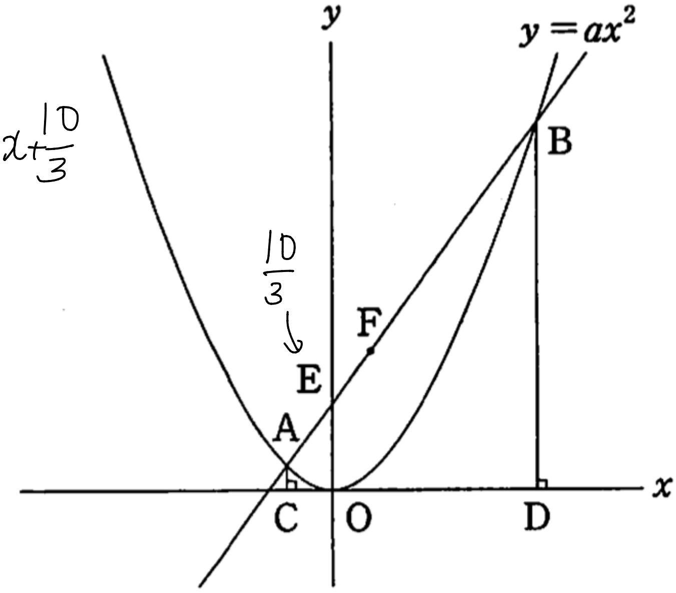
傾き $= \frac{6-\frac{11}{3}}{1-5} = \frac{\frac{7}{3}}{-4} = -\frac{7}{12}$ $\qquad 6 = -\frac{7}{12}\times 1 + b$

$b = \frac{79}{12}$

よって $\underline{y = -\frac{7}{12}x + \frac{79}{12}}$ //

(3) 点Gの座標を $\left(-8,\ \frac{19}{3}\right)$ とし，△AEGを直線ABを回転の軸として１回転させてできる立体の体積を求めよ。$\boxed{\text{E}}$
（解答欄に途中計算や考え方を書き，答えを求めよ





直線GEの傾き $= \dfrac{\frac{10}{3}-\frac{19}{3}}{0-(-8)} = -\dfrac{3}{8}$

GEの傾き × ABの傾き $= -\frac{3}{8} \times \frac{8}{3} = -1$

になるということは GE ⊥ AB
なので左上図
となる。

高校の知識です。

よって求める体積 $= GE^2 \times \pi \times AE \times \frac{1}{3}$

（半径GE
高さAE
の円錐の
体積）

$= (8^2+3^2) \times \pi \times \sqrt{1^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2} \times \frac{1}{3}$

$= (64+9) \times \pi \times \sqrt{\frac{73}{9}} \times \frac{1}{3}$

$= \dfrac{73\sqrt{73}}{9}\pi$ //