名城大学附属高等学校（H29　数学）

（１００点満点　４０分）

１．次の問いに答えなさい。

(1)　$-0.5^2-6^2\div\left(-\dfrac{4}{3}\right)^3\div\{-12-(-3)\times5\}=\dfrac{\boxed{ア}\boxed{イ}}{\boxed{ウ}\boxed{エ}}$ である。

⑵ $(3\sqrt{2}+2)^2-2(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})=\boxed{オ}\,\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$ である。

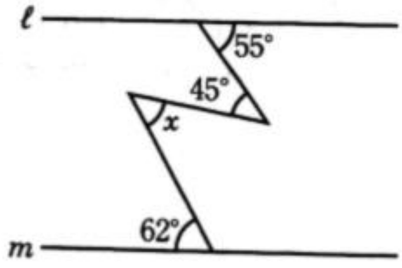
(3) x についての二次方程式 $x^2 - 4x + 2 = 0$ の2つの解を a, b $(a > b)$ とするとき,
$a^2 + ab$ の値は $\boxed{ク}\left(\boxed{ケ} + \sqrt{\boxed{コ}}\right)$ である。

(4) x と y についての２つの連立方程式

$$\begin{cases} 3x - 4y = -25 \\ ax + y = 1 \end{cases} \quad と \quad \begin{cases} x + by = 5 \\ 5x + 6y = 9 \end{cases}$$

が同じ解をもつとき，$a = \boxed{サ}$，$b = \boxed{シ}$ である。

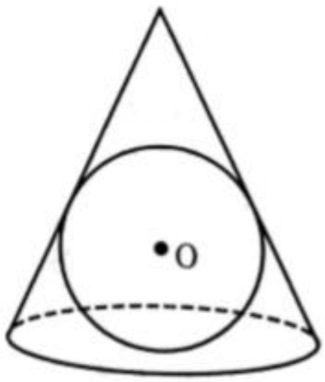
⑸ 右の図において，$\ell \,//\, m$ のとき，$\angle x = \boxed{ス}\boxed{セ}^\circ$ である。



(6) 下の図のように，高さ12cm，底面の半径 $3\sqrt{2}$ cmの円錐が球Oと側面で接し，底面の中心でも接している。

このとき，球Oの半径は $\boxed{ソ}$ cmで，

球Oの体積は $\boxed{タ}\boxed{チ}$ π cm^{3}である。



2.

濃度が６％の食塩水Ａがａｇ，10%の食塩水Ｂがｂｇ，12%の食塩水Ｃがｃｇある。ＡとＢを全部まぜると９％の食塩水ができ，ＡとＣを全部まぜると10.8%の食塩水ができる。このとき，3種類の食塩水Ａ，Ｂ，Ｃを全部まぜると $\boxed{ア}\boxed{イ}.\boxed{ウ}$ %の食塩水ができる。

3.

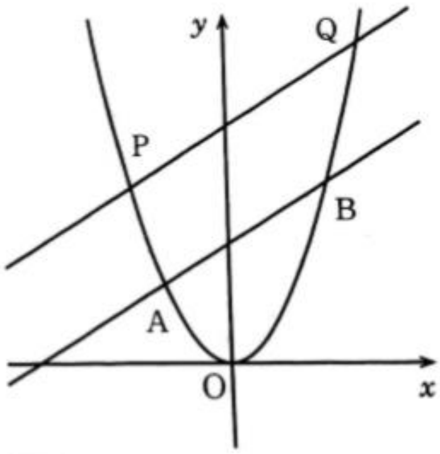
　2つのさいころA，Bを同時に投げるとき，さいころAの目の数を a，さいころBの目の数を b とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　a と b の積が偶数となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2)　x についての二次方程式 $ax^2 - bx - 2 = 0$ が $x = 1$ を解にもつとき，
その確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

4.

右の図のように，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=\frac{1}{2}x+3$ との交点のうち，x 座標が負であるものをA，x 座標が正であるものをBとする。また，AB // PQとなるように放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上に異なる２点P，Qをとる。
このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　点Bの座標は $\left(\boxed{ア},\ \frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\right)$ である。

(2)　点Bを通り，△OABの面積を二等分する直線の式は，
$y=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}x+\frac{\boxed{カ}\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である。

(3)　２点P，Qの x 座標をそれぞれ p，q とするとき，$p+q=\boxed{ケ}$ である。

5.

円周の長さが12πの円Oがある。点Pは円O上の点Aを出発し反時計回りに円周上を毎秒3πの速さで進み，点Qは点Aを出発し時計回りに円周上を毎秒2πの速さで進む。点P，Qが点Aを同時に出発するとき，次の問いに答えなさい。

(1) 円Oの半径は $\boxed{ア}$ である。

(2) 点P，Qが点Aを出発してから2秒後の△APQの面積S_1は $\boxed{イ}\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$ である。

(3) 点Qは点Aを出発してから5秒後に停止し，点Pはその後も進み続けるものとする。

点Qが停止してから，△APQの面積が最大となるときの△APQの面積S_2は

$\boxed{オ}\left(\boxed{カ}+\sqrt{\boxed{キ}}\right)$ である。

また，点Qが停止してから初めて△APQの面積がS_2となるのは，点Qが停止してから

$\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$秒後である。

名城大学附属高等学校（H29　数学）

（１００点満点　４０分）

１．次の問いに答えなさい。

(1)　$-0.5^2-6^2\div\left(-\frac{4}{3}\right)^3\div\{-12-(-3)\times5\}=\frac{\boxed{ア}\boxed{イ}}{\boxed{ウ}\boxed{エ}}$ である。

$0.5=\frac{1}{2}$ に

$$=-\left(\frac{1}{2}\right)^2-(6\times6)\div\left\{\left(-\frac{4}{3}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)\right\}\div\{-12-(-15)\}$$

（　）をそれぞれ計算

$$=-\frac{1}{4}-36\div\left(-\frac{64}{27}\right)\div3$$

÷を×逆数に。

$$=-\frac{1}{4}-\cancel{36}^{\,9}\times\left(-\frac{\cancel{27}^{\,9}}{\cancel{64}_{\,16}}\right)\times\frac{1}{\cancel{3}_{\,1}}$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{81}{16}$$

$$=-\frac{4}{16}+\frac{81}{16}=\frac{77}{16}$$

Point　複雑な計算が問われる。

☑ 指数法則 … $-a^2$, $(-a)^2$, $(-a)^3$

☑ ×÷の混合 … $a\div b\div c$

☑ 小数・分数の混合

(2) $(3\sqrt{2}+2)^2-2(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})=$ $\boxed{オ}\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$ である。

① ②

計算のまとまりは，①－② である。それぞれを計算。

① $(3\sqrt{2}+2)^2=(3\sqrt{2})^2+2\times3\sqrt{2}\times2+2^2$

$=3\sqrt{2}\times3\sqrt{2}+12\sqrt{2}+4$

$9\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

$=9\times2+12\sqrt{2}+4$

$=18+12\sqrt{2}+4=22+12\sqrt{2}$

$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$

② $2(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})=2(4^2-(\sqrt{5})^2)$

$=2(16-5)=2\times11=22$

$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$

①－②$=(22+12\sqrt{2})-22=12\sqrt{2}$ //

Point

1 展開公式の利用

40分で大問5問解くには公式でよりスピードUPして正解できる力が必要です。

2 1行の式でなくても良い。

今回のように，別々に計算して，最後にまとめてもできます。

(3) xについての二次方程式 $x^2-4x+2=0$ の2つの解を a, b $(a>b)$ とするとき，a^2+ab の値は $\boxed{ク}$ $(\boxed{ケ}+\sqrt{\boxed{コ}})$ である。

- $x^2-4x+2=0$ は因数分解して $(x-a)(x-b)=0$ となる a, b 整数がないので，解の公式で解く。

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times2}}{2\times1}=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2}$$

$a>b$ より $a=2+\sqrt{2}$, $b=2-\sqrt{2}$ となる。

- $a^2+ab=a(a+b)$

$$=(2+\sqrt{2})(2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2})$$

$$=(2+\sqrt{2})\times4=\underline{4(2+\sqrt{2})}$$

Point ＜式の値＞

a, bを式にいきなり代入ではなく，
式を因数分解すると，わかりやすい式になり，解が求めやすくなる。

(4) x と y についての２つの連立方程式

$$\begin{cases} 3x-4y=-25 & \cdots ① \\ ax+y=1 & \cdots ② \end{cases} \text{と} \begin{cases} x+by=5 & \cdots ③ \\ 5x+6y=9 & \cdots ④ \end{cases}$$

が同じ解をもつとき，$a=$ $\boxed{サ}$，$b=$ $\boxed{シ}$ である。

↳ どの式①〜④の x, y にも同じ解があてはまるので，具体的に分かっている式２つを用いて連立方程式を解き，(x, y) を求める。

$$\begin{cases} 3x-4y=-25 & \cdots ① \\ 5x+6y=9 & \cdots ④ \end{cases}$$

①×3＋④×2

$$\begin{array}{rrl} & 9x-12y= & -75 \\ +) & 10x+12y= & 18 \\ \hline & 19x\quad\quad= & -57 \end{array}$$

$x=-3$

④に $x=-3$ を代入すると

$-15+6y=9$

$6y=24$

$y=4$

$(x, y)=(-3, 4)$

$$\begin{cases} ax+y=1 & \cdots ② \\ x+by=5 & \cdots ③ \end{cases}$$

に $(x, y)=(-3, 4)$ を代入すると ②より

$-3a+4=1$

$a=1$

③より

$-3+4b=5$

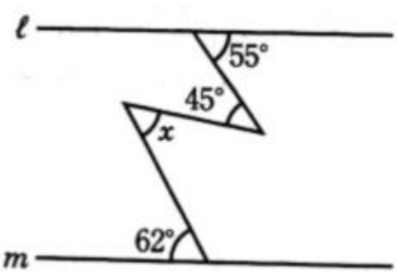
$b=2$

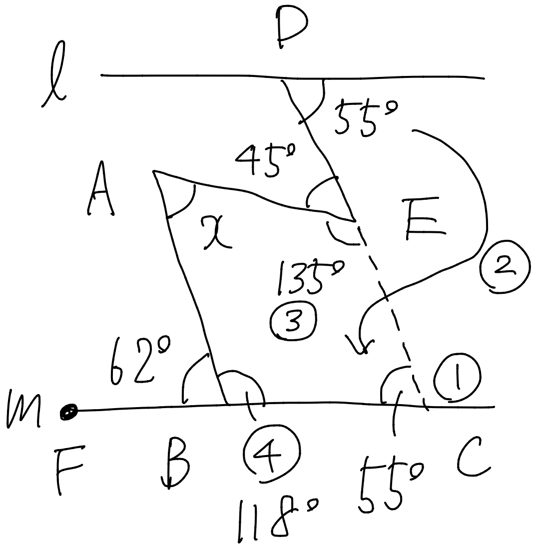
$(a, b)=(1, 2)$ //

Point

上の４行の流れ

⑸ 右の図において，$\ell // m$ のとき，$\angle x =$ $\boxed{ス}\boxed{セ}$ ° である。





① DEの延長線と mとの交点をCとする。

↓

② $\ell // m$ の錯角より

$\angle ECB = 55°$

③ $\angle DEA$ の外角なので

$\angle AEC = 180 - 45°$

$= 135°$

↓

④ $\angle ABF$ の外角なので

$\angle ABC = 180 - 62°$

$= 118°$

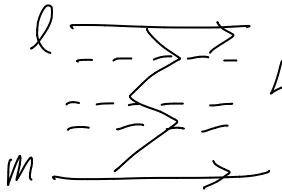
⑤ □ABCEの内角の和は360°なので

$x + 118° + 55° + 135° = 360°$

$x = 52°$

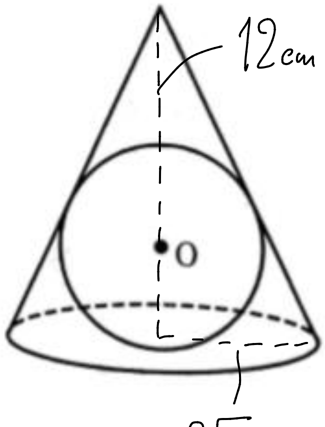
Point

・イナズマ型は補助線として平行線が有力ですが延長線での解法も



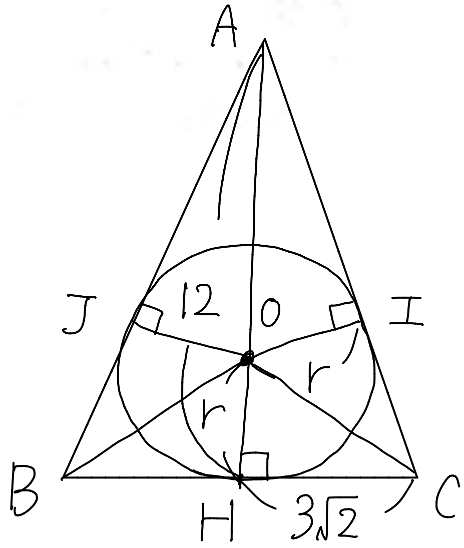
身につけておくべきスキルの1つです。

(6) 下の図のように，高さ12cm，底面の半径 $3\sqrt{2}$ cmの円錐が球Oと側面で接し，底面の中心でも接している。
このとき，球Oの半径は [ソ] cmで，
球Oの体積は [タ][チ] π cm³である。



頂点とOを通る平面で切断して考える。

半径をr cmとする。



△ABHの面積を2通りで表し，等号で結ぶ。

$\boxed{① \ BC \times AH \times \frac{1}{2}}$

$BC = HC \times 2$

$= 3\sqrt{2} \times 2 = 6\sqrt{2}$

$6\sqrt{2} \times 12 \times \frac{1}{2} = 36\sqrt{2}$ cm²

$\boxed{② \ \triangle AOC + \triangle AOB + \triangle BOC}$

$AB = AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{12^2 + (3\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{144 + 18} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$ cm

$\triangle AOC = AC \times OI \times \frac{1}{2} = 9\sqrt{2} \times r \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} r$

$\triangle AOB = AB \times OJ \times \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} r$

$\triangle BOC = BC \times OH \times \frac{1}{2} = 6\sqrt{2} \times r \times \frac{1}{2} = 3\sqrt{2} r$

合計 $= \frac{9\sqrt{2}}{2} r + \frac{9\sqrt{2}}{2} r + 3\sqrt{2} r = 21\sqrt{2} r$ cm²

$36\sqrt{2} = 21\sqrt{2} r$

より $r = 3$

半径 = 3cm //

球の体積 $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi$ cm³ //

2.

濃度が６％の食塩水Ａがａｇ，10％の食塩水Ｂがｂｇ，12％の食塩水Ｃがｃｇある。ＡとＢを全部まぜると９％の食塩水ができ，ＡとＣを全部まぜると10.8％の食塩水ができる。このとき，3種類の食塩水Ａ，Ｂ，Ｃを全部まぜると $\boxed{ア}\boxed{イ}.\boxed{ウ}$ ％の食塩水ができる。

②

①

	A	B	C	計
	6% a g	10% b g		9% (a+b) g
食塩	0.06a (g)	0.1b (g)		0.09(a+b)(g) …①
	6% a g		12% c g	10.8% (a+c) g
食塩	0.06a (g)		0.12c (g)	0.108(a+c)(g) …②

① … $0.06a + 0.1b = 0.09(a+b)$ ↓×100

$6a + b = 9(a+b) \longrightarrow \boxed{b=3a}$

② … $0.06a + 0.12c = 0.108(a+b)$ ↓×1000

$60a + 120c = 108(a+b) \longrightarrow \boxed{c=4a}$

3% = 0.03
なので
x% = 0.01x

3種類の食塩水を混ぜて x％の食塩水ができたとすると

$0.06a + 0.1b + 0.12c = 0.01x(a+b+c)$ ↓×100

$6a + 10b + 12c = x(a+b+c)$

b=3a, c=4a を代入すると， $6a + 30a + 48a = x(a+3a+4a)$

$8ax = 84a$ $x = 10.5$ $\underline{10.5\%}$ //

3.

２つのさいころA，Bを同時に投げるとき，さいころAの目の数を a，さいころBの目の数を b とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) a と b の積が偶数となる確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2) x についての二次方程式 $ax^2-bx-2=0$ が $x=1$ を解にもつとき，その確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

(1) abが奇数になるのは、a,bが共に奇数(1,3,5)のときなので 9通り(3×3)を全36通りから除けばよい。

$36-9=27$

$\dfrac{27}{36}=\dfrac{3}{4}$ //

(2)

a＼b	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

$x=1$ を解にもつので $ax^2-bx-2=0$ に代入すると, $a-b=2$ となり, その組み合わせは

$a=2+b$

$(a,b)=(3,1),(4,2),(5,3),(6,4)$ の4通り

よって $\dfrac{4}{36}$

$=\dfrac{1}{9}$ //

Point

1 ○○を除く考え方 = 余事象 (○○が起こらない)

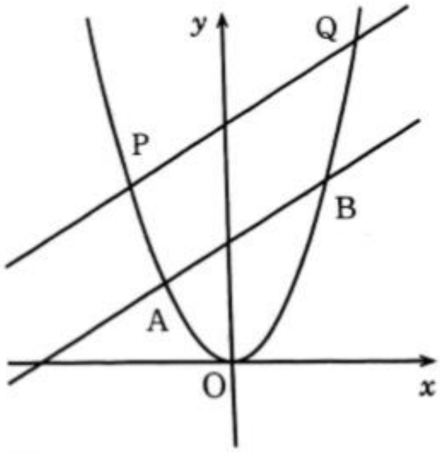
→ 引き算で考えます。

2 表を作成すれば必ず正解できますが，時間がかかる場合が多いので組み合わせを見つけたり，かけ算で求める練習が必要です。

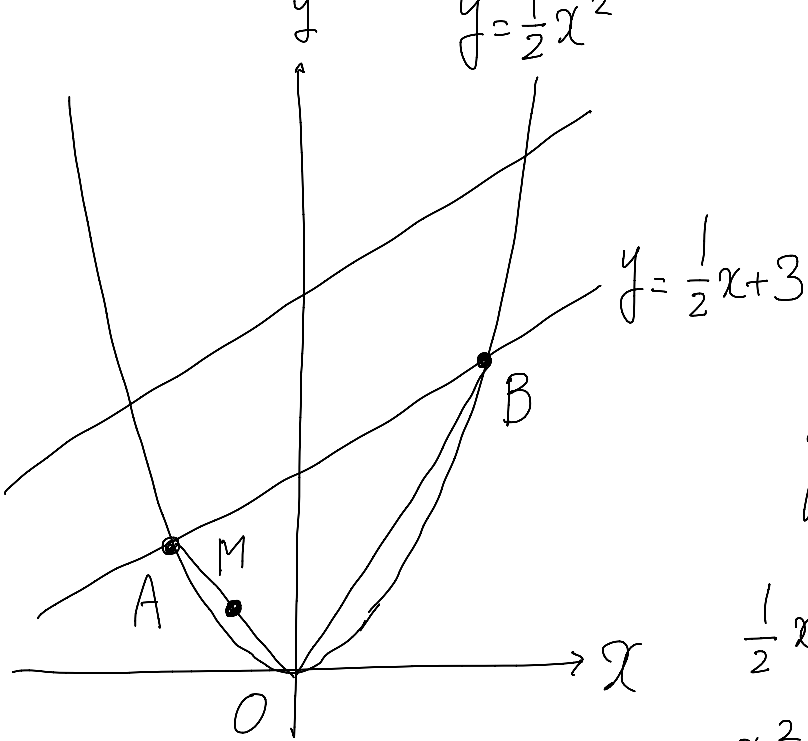
右の図のように，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=\frac{1}{2}x+3$ との交点のうち，x 座標が負であるものをA，x 座標が正であるものをBとする。また，AB // PQとなるように放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上に異なる2点P，Qをとる。
このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 点Bの座標は $\left(\boxed{ア},\ \frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\right)$ である。

(2) 点Bを通り，△OABの面積を二等分する直線の式は，
$y=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}x+\frac{\boxed{カ}\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である。



(3) 2点P，Qの x 座標をそれぞれ p，q とするとき，$p+q=\boxed{ケ}$ である。



(1) Bは $y=\frac{1}{2}x^2$ と $y=\frac{1}{2}x+3$ の交点なので連立方程式にして解くと交点が求まる。

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 & \cdots ① \\ y=\frac{1}{2}x+3 & \cdots ② \end{cases}$$
代入

$\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x+3$ ↓×2

$x^2=x+6$ $x^2-x-6=0$

$(x+2)(x-3)=0$

$x=-2,\ 3$ を①に代入

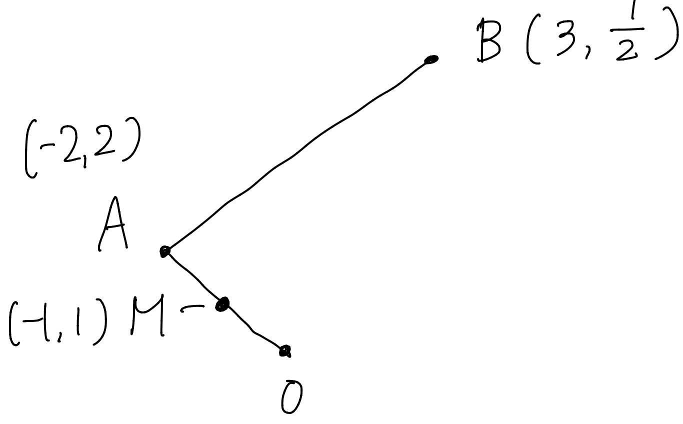
$y=\frac{1}{2}(-2)^2=2$ A$(-2, 2)$

$y=\frac{1}{2}\times 3^2=\frac{9}{2}$ B$\left(3, \frac{9}{2}\right)$ //

(2) Bを通り△OABの面積を2等分するにはOAの中点Mを求め，B, Mの2点を通る直線の式を求めればよい。

→次のページへ

(2)の続き



$$M\left(\frac{0+(-2)}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$$

$$= M(-1, 1)$$

よってBMの式を求めるため

傾きを求める。

$$(-1, 1) \quad (3, \tfrac{9}{2})$$

$\frac{7}{2}$

4

$$傾き = \frac{\frac{7}{2}}{4}$$

$$= \frac{7}{2} \div 4 = \frac{7}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$$

よって BM : $y = \frac{7}{8}x + b$

$(-1, 1)$を通るので ↑代入

$$1 = \frac{7}{8} \times (-1) + b$$

$$b = \frac{15}{8} \qquad y = \frac{7}{8}x + \frac{15}{8}$$

//

Point 中点Mの求め方

$A(a, b)$, $B(c, d)$

2点ABの中点Mは

$$M\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$$

で求められる。

(3) PQは$y = \frac{1}{2}x + 3$と平行

なので傾きが等しいので

$y = \frac{1}{2}x + b$ と表される。

$y = \frac{1}{2}x^2$との交点がP, Qなので

$y = \frac{1}{2}x^2$ と $y = \frac{1}{2}x + b$ を連立して

$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + b$ ↓×2に整理

$x^2 - x - 2b = 0$

P, Qのx座標をp, qとすると

$x^2 - (p+q)x + pq$ が成り立つ。

〰の式の解は2つのグラフの交点のx座標なので

$(x-p)(x-q) = 0$

から生まれます。

↑重要!

$$x^2 - 1x - 2b = 0$$

$$x^2 - (p+q)x + pq = 0$$

係数比較して $p + q = 1$

//

5.

円周の長さが12πの円Oがある。点Pは円O上の点Aを出発し反時計回りに円周上を毎秒３πの速さで進み，点Qは点Aを出発し時計回りに円周上を毎秒２πの速さで進む。点P，Qが点Aを同時に出発するとき，次の問いに答えなさい。

(1) 円Oの半径は $\boxed{ア}$ である。

(2) 点P，Qが点Aを出発してから２秒後の△APQの面積S_1は $\boxed{イ}\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$ である。

(3) 点Qは点Aを出発してから５秒後に停止し，点Pはその後も進み続けるものとする。
点Qが停止してから，△APQの面積が最大となるときの△APQの面積S_2は
$\boxed{オ}\left(\boxed{カ}+\sqrt{\boxed{キ}}\right)$ である。
また，点Qが停止してから初めて△APQの面積がS_2となるのは，点Qが停止してから
$\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ 秒後である。

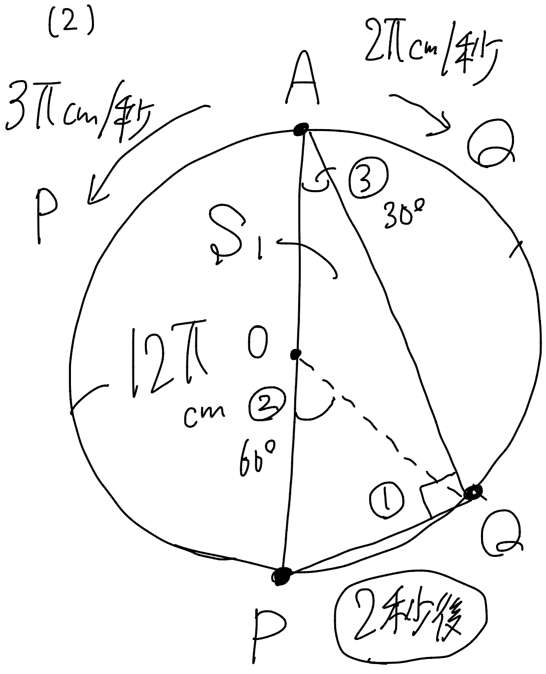
(1) 円の半径 × 2 × π ＝ 円周の長さ なので 円の半径 を r とすると

$r \times 2 \times \pi = 12\pi$ ↓÷2π

$r = 6$

よって円の半径は 6 cm //

(2)



① 2秒後の△APQは左図のようになり，点Qは直径APに対する円周角なので∠AQP = 90°。

② 円周が12πでQは2πcm/秒なので $\overset{\frown}{PQ} = 2\pi$ となり中心角を $\frac{2\pi}{12\pi} = \frac{1}{6}$ にする。すなわち

$360 \div \frac{1}{6} = 60°$，よって円周角∠PAQ

③ ＝30°

④ △APQは30°, 60°, 90°の直角三角形となりAP＝12cmなので

$1:2:\sqrt{3} = PQ:AP:AQ$

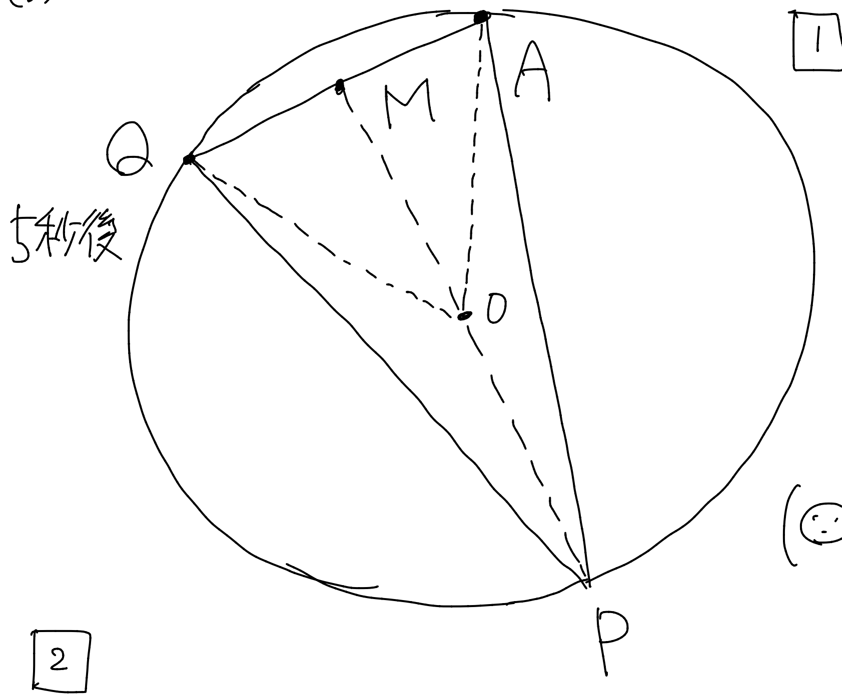
$= 6:12:6\sqrt{3}$

$\triangle APQ = PQ \times AQ \times \frac{1}{2}$

$= 6 \times 6\sqrt{3} \times \frac{1}{2}$

$= 18\sqrt{3}$ cm² //

(3)



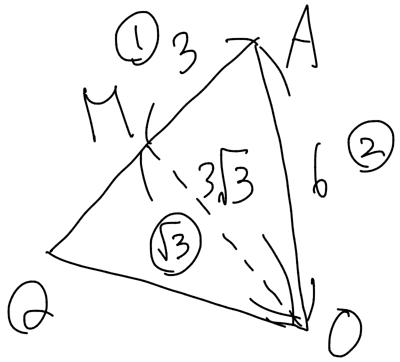
$\boxed{1}$ △APQが最大になるのは AQの中点MとOを結んだ延長線と円Oが交わる点にPがくる時である。

(∵ △APQ = AQ×PM×$\frac{1}{2}$)

$\boxed{2}$

$\overset{\frown}{AQ}$ は 2π であり中心角∠AOQ = 60°となるため △AOQは正三角形となり OMは $3\sqrt{3}$ となる。

1:2:$\sqrt{3}$ の比は すぐに使えるようにしよう



OP = 半径 = 6 なので

PM = $6+3\sqrt{3}$ cm

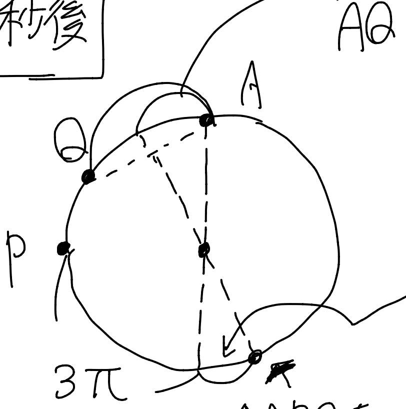
△APQ = AQ×PM×$\frac{1}{2}$ = $6\times(6+3\sqrt{3})\times\frac{1}{2}$

= $9(2+\sqrt{3})$ cm²

$\boxed{5秒後}$

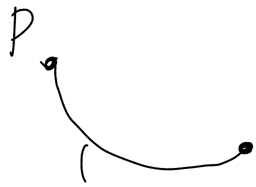
$\overset{\frown}{AQ} = 2\pi$ なので この長さは π

ここと同じ



△APQを最大にする位置

よって



4π となる。

Pは 3πcm/秒 で 4πcm 進むので $\frac{4}{3}$ 秒後