

(滝) 高等学校 H(31) 数学

(100点満点 (50) 分)

推薦・帰国子女

1. 次の問いに答えなさい。

1. 次の各問いに答えよ。

(1) $x^2 - 4y^2 - 2x - 4y$ を因数分解せよ。

(2) 2次方程式 $2(x+1)^2 = 3$ を解け。

(3) $\sqrt{45a}$ が整数となる100以下の自然数 a をすべて求めよ。

- (4) A中学校と滝中学校の1年生男子生徒について、50m走のタイムを計測し、その結果を整理したものが右の度数分布表である。A中学校の一郎君の記録は7.9秒で、滝中学校の次郎君の記録は両校の合計183名の中で速い方から数えて35番目であった。一郎君と次郎君どちらが速いかを考察したとき、度数分布表から読み取れることがらについて、次のア～エのうち最も適切なものを選び記号で答えよ。
- ア 一郎君の方が速い。
 - イ 次郎君の方が速い。
 - ウ 一郎君と次郎君の速さは同じ。
 - エ どちらが速いか判断できない。

50m 走 (秒)		A中学校度数	滝中学校度数
以上	未満	(人)	(人)
6.0	～ 6.5	1	4
6.5	～ 7.0	3	8
7.0	～ 7.5	4	12
7.5	～ 8.0	10	25
8.0	～ 8.5	14	34
8.5	～ 9.0	13	25
9.0	～ 9.5	10	11
9.5	～ 10.0	2	7
計		57	126

- (5) 2個のさいころを同時に投げるとき、目の和が6になる確率と7になる確率はどちらが大きいかを考えていたA君は、『和が6であるのは「1と5」,「2と4」,「3と3」が出る場合であり、和が7になるのは「1と6」,「2と5」,「3と4」が出る場合である。両方とも3通りだから、確率は同じ。』と言っているがこの考えは誤りである。なぜ誤りなのか説明せよ。

2.

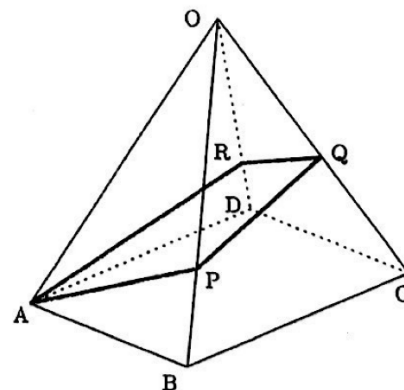
2. 図のように、 $OA = OB = OC = OD = 6$ 、 $AB = BC = CD = DA$ である正四角錐 $O-ABCD$ がある。辺 OB, OC, OD 上にそれぞれ点 P, Q, R をとり、折れ線 $AP + PQ + QR + RA$ の長さが最小になるようにしたとき、 $OQ = 3$ となった。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) 折れ線 $AP + PQ + QR + RA$ の長さを求めよ。

(2) $\angle AOP$ の大きさを求めよ。

(3) 面積比 $\triangle OAP : \triangle OPQ$ を求めよ。

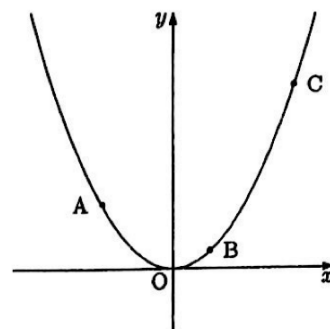
(4) PQ の長さを求めよ。



3.

3. 関数 $y = ax^2$ 上に、3 点 $A(-2, 2)$, $B(1, b)$, $C(c, 8)$ をとる。ただし、 $c > 0$ とする。
このとき、次の各問に答えよ。

- (1) a, b, c の値をそれぞれ求めよ。
- (2) 四角形 $ABCD$ が平行四辺形となるとき、点 D の座標を求めよ。
- (3) 関数 $y = px$ が (2) の平行四辺形の面積を二等分するとき、 p の値を求めよ。



4. 濃度 x % の食塩水がそれぞれ 10 L ずつ入っている容器 P と容器 Q があり、それぞれの容器には 2 本の管 A, B がついている。管 A からは容器に濃度 y % の食塩水を毎分 1.5 L 流し込むことができ、管 B からは容器に濃度 3 % の食塩水を毎分 1.6 L 流し込むことができる。

(ア) 容器 P に、はじめに管 A だけを 10 分間用いて食塩水を流し込んだ。 (イ) その後、管 B だけを用いて食塩水を流し込んだが、食塩水の濃度は一定のまま変わらなかった。

また、(ウ) 容器 Q に、管 A, B の両方を 20 分間用いて食塩水を流し込むと、食塩水の濃度は 2.5 % となった。

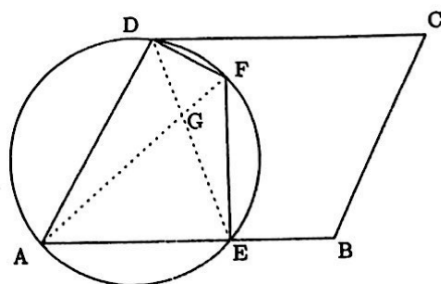
このとき、次の各問いに答えよ。ただし、 x と y は異なる値とし、いずれの容器からも食塩水があふれることはないものとする。

- (1) 下線部 (ア) を行った後、容器 P の食塩水の濃度は何% になるか。 x, y を用いて表せ。
- (2) 下線部 (イ) から、 y を x の式で表せ。
- (3) 下線部 (ウ) から、 y を x の式で表せ。
- (4) x, y の値を求めよ。

5.

5. 平行四辺形 $ABCD$ において、 $AB = 9$, $BC = 6$, $\angle BAD = 60^\circ$ である。また、辺 AB 上の点 E と、点 A, D を通る円 O がある。点 E を通り辺 AB に垂直な直線と円 O との交点のうち点 E ではないものを F とする。 $AE = 5$ であるとき、次の各問に答えよ。

- (1) 平行四辺形 $ABCD$ の面積を求めよ。
- (2) DE の長さを求めよ。
- (3) 円 O の直径の長さを求めよ。
- (4) AF と DE の交点を G とする。 $\triangle AGD \sim \triangle EGF$ を証明せよ。



(滝)

)高等学校

H(31)数学

(100点満点 (50)分)

推薦・帰国子女

1. 次の問いに答えなさい。

1. 次の各問いに答えよ。

(1) $x^2 - 4y^2 - 2x - 4y$ を因数分解せよ。

(2) 2次方程式 $2(x+1)^2 = 3$ を解け。

(3) $\sqrt{45a}$ が整数となる100以下の自然数 a をすべて求めよ。

$$(2) \quad 2(x+1)^2 = 3$$

$$(x+1)^2 = \frac{3}{2}$$

$$x+1 = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$x = -1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2} //$$

$$(1) \quad (x+2y)(x-2y) - 2(x+2y)$$

$$x+2y = M \text{ とおくと}$$

$$M(x-2y) - 2M$$

$$= M(x-2y-2)$$

$$M = x+2y \text{ を戻すと}$$

$$= (x+2y)(x-2y-2) //$$

$$n = 1, 2, 3, 4$$

とわかる。

$$(3) \quad \begin{array}{r} 3 \overline{)45} \\ 3 \overline{)15} \\ \underline{5} \end{array} \quad \sqrt{45a} = 3\sqrt{5a}$$

$3\sqrt{5a}$ が整数 となる

$a = 5n^2$ (n : 自然数) とおける。

$a \leq 100$ となる

$$5n^2 \leq 100$$

$$n^2 \leq 20$$

$$n \leq 2\sqrt{5} = 2 \times 2.236 \\ = 4.4 \dots$$

• $n=1$ のとき

$$a = 5 \times 1^2 = 5$$

• $n=2$ のとき

$$a = 5 \times 2^2 = 20$$

• $n=3$ のとき

$$a = 5 \times 3^2 = 45$$

• $n=4$ のとき

$$a = 5 \times 4^2 = 80$$

$$\therefore n = 1, 2, 3, 4$$

$$a = 5, 20, 45, 80 //$$

- (4) A中学校と滝中学校の1年生男子生徒について、50m走のタイムを計測し、その結果を整理したものが右の度数分布表である。A中学校の一郎君の記録は7.9秒で、滝中学校の次郎君の記録は両校の合計183名の中で速い方から数えて35番目であった。一郎君と次郎君どちらが速いかを考察したとき、度数分布表から読み取れることがらについて、次のア～エのうち最も適当なものを選り記号で答えよ。

- ア 一郎君の方が速い。
イ 次郎君の方が速い。
ウ 一郎君と次郎君の速さは同じ。
エ どちらが速いかわからない。

一郎君
次郎君 ともに

7.5～8.0の階級に入る。

50m 走 (秒)		A中学校度数	滝中学校度数
以上	未満	(人)	(人)
6.0	～ 6.5	1	4
6.5	～ 7.0	3	8
7.0	～ 7.5	4	12
7.5	～ 8.0	10	25
8.0	～ 8.5	14	34
8.5	～ 9.0	13	25
9.0	～ 9.5	10	11
9.5	～ 10.0	2	7
計		57	126

- 一郎君 ... 7.9秒なので 7.5～8.0の階級に入る。
- 次郎君 ... 速い方から35番目で

6.0～6.5 + 6.5～7.0 + 7.0～7.5 の両中学校の人数
の和は $1+4+3+8+4+12 = 32$ (人) なので

7.5～8.0の階級に入る。

しかしこの階級で3番目の記録が7.9秒で

ある可能性もあり、そうでない可能性もある。

以上より 2人の速さを判断できない エ //

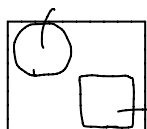
- (5) 2個のさいころを同時に投げるとき、目の和が6になる確率と7になる確率はどちらが大きいかを考えていたA君は、『和が6であるのは「1と5」、「2と4」、「3と3」が出る場合であり、和が7になるのは「1と6」、「2と5」、「3と4」が出る場合である。両方とも3通りだから、確率は同じ。』と言っているがこの考えは誤りである。なぜ誤りなのか説明せよ。

	1	2	3	4	5	6
1					○	×
2				○	×	
3			○	×		
4		○	×			
5	○	×				
6	×					

左の表から

- 目の和が6は5通りで
確率は $\frac{5}{36}$

- 目の和が7は6通りで
確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$



目の和が6のとき○と示す。
7のとき×と示す。

よって確率は等しくない。

～ 2 ～

2.

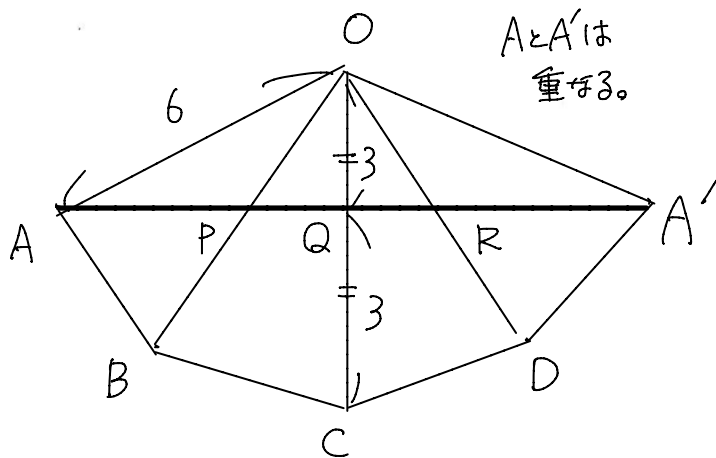
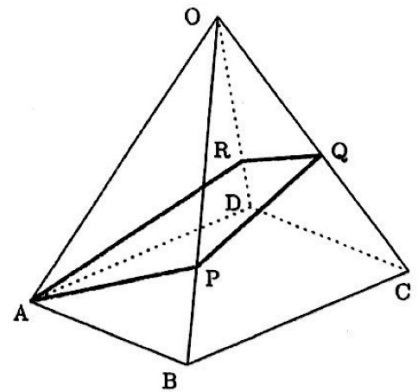
2. 図のように、 $OA = OB = OC = OD = 6$, $AB = BC = CD = DA$ である正四角錐 $O-ABCD$ がある。辺 OB, OC, OD 上にそれぞれ点 P, Q, R をとり、折れ線 $AP + PQ + QR + RA$ の長さが最小になるようにしたとき、 $OQ = 3$ となった。このとき、次の各問に答えよ。

(1) 折れ線 $AP + PQ + QR + RA$ の長さを求めよ。

(2) $\angle AOP$ の大きさを求めよ。

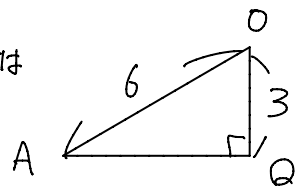
(3) 面積比 $\triangle OAP : \triangle OPQ$ を求めよ。

(4) PQ の長さを求めよ。



(1) $\triangle OAQ$ は

右の図で



$\angle OAQ = 30^\circ$, $\angle AOQ = 60^\circ$

の $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形となる。

$\therefore$ 求める折れ線の長さ $\pm AA'$

$$= AQ \times 2 = 3\sqrt{3} \times 2 = 6\sqrt{3}$$

——#

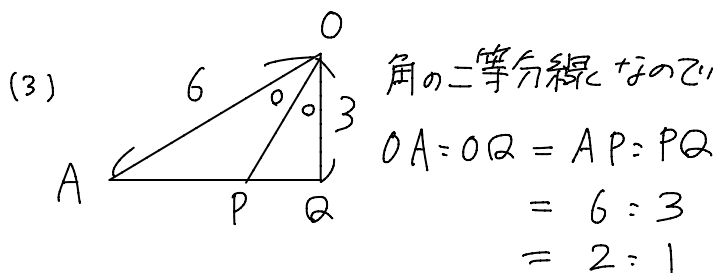
(2) $\triangle OAQ$ で $\angle AOQ = 60^\circ$ で

$\triangle OAB \equiv \triangle OBC$ より

$\angle AOB = \angle BOC = 30^\circ$

$\therefore \angle AOP = \angle AOB = 30^\circ$

——#



(3)

$$\begin{aligned} OA &= OQ = AP = PQ \\ &= 6 : 3 \\ &= 2 : 1 \end{aligned}$$

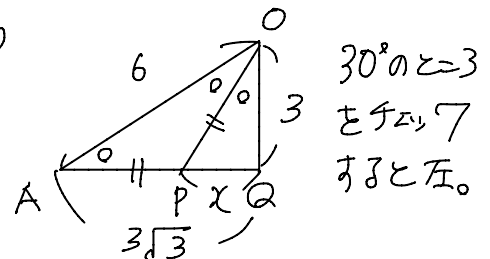
$\triangle OAP$ と $\triangle OPQ$ は高さの等しい三角形なので、面積比 = 底辺比² で求められる。

$$\therefore \triangle OAP : \triangle OPQ = 2^2 : 1^2$$

$$= 4 : 1$$

——#
~ 3 ~

(4)



$PQ = x$ とおくと $\triangle OAP$ は二等辺三角形

$AQ = 3\sqrt{3}$ より

$$AP = 3\sqrt{3} - x = OP$$

$\triangle OPQ$ で三平方の定理より

$$(3\sqrt{3} - x)^2 = 3^2 + x^2$$

$$27 - 6\sqrt{3}x + x^2 = 9 + x^2$$

$$6\sqrt{3}x = 18$$

$$x = \sqrt{3} \quad PQ = \sqrt{3}$$

——#

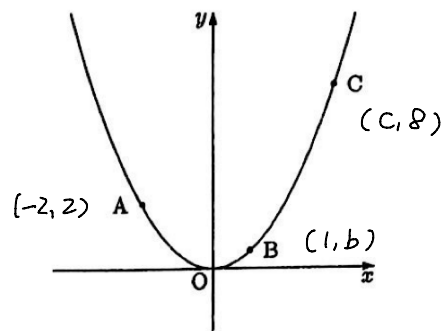
3.

3. 関数 $y = ax^2$ 上に、3点 $A(-2, 2)$, $B(1, b)$, $C(c, 8)$ をとる。ただし、 $c > 0$ とする。
このとき、次の各問に答えよ。

(1) a, b, c の値をそれぞれ求めよ。

(2) 四角形 $ABCD$ が平行四辺形となるときの、点 D の座標を求めよ。

(3) 関数 $y = px$ が (2) の平行四辺形の面積を二等分するとき、 p の値を求めよ。



(1)

• $A(-2, 2)$ は $y = ax^2$ 上の点なので

$x = -2$, $y = 2$ を $\uparrow$ 代入して

$$2 = a \times (-2)^2 \quad a = \frac{1}{2} \quad \therefore y = \frac{1}{2}x^2$$

• $B(1, b)$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入して

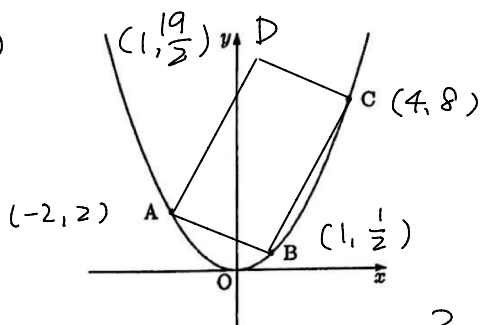
$$b = \frac{1}{2} \times 1^2 \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

• $C(c, 8)$ を $y = \frac{1}{2}x^2$ に代入して

$$8 = \frac{1}{2}c^2, \quad c^2 = 16, \quad c = \pm 4$$

$$c > 0 \text{ より } c = 4$$

(2)



$\square ABCD$ は平行四辺形なので、
1組の向かいあう辺が等しく平行
なので $BA \parallel CD$ の傾きから
 D の座標を求めよ。

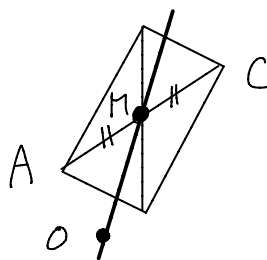
B から 左へ -3 , 上へ $\frac{3}{2}$ に A があるので、 C から 同じようにして、

$$D(4-3, 8+\frac{3}{2}) = D(1, \frac{19}{2})$$

(3) 平行四辺形の対角線の交点を通る直線は平行四辺形の
面積を2等分する。ここは AC の中点 $M(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{8+2}{2})$
 $= (1, 5)$

$y = px$ が $(1, 5)$ を通るので

$$5 = p \times 1 \quad p = 5$$



4. 濃度 $x\%$ の食塩水がそれぞれ 10 L ずつ入っている容器 P と容器 Q があり、それぞれの容器には 2 本の管 A, B がついている。管 A からは容器に濃度 $y\%$ の食塩水を毎分 1.5 L 流し込むことができ、管 B からは容器に濃度 3% の食塩水を毎分 1.6 L 流し込むことができる。

(ア) 容器 P に、はじめに管 A だけを 10 分間用いて食塩水を流し込んだ。(イ) その後、管 B だけを用いて食塩水を流し込んだが、食塩水の濃度は一定のまま変わらなかった。

また、(ウ) 容器 Q に、管 A, B の両方を 20 分間用いて食塩水を流し込むと、食塩水の濃度は 2.5% となった。

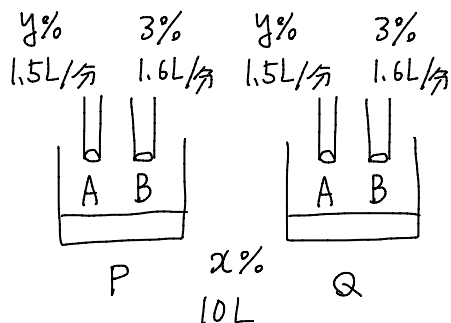
このとき、次の各問に答えよ。ただし、 x と y は異なる値とし、いずれの容器からも食塩水があふれることはないものとする。

- (1) 下線部 (ア) を行った後、容器 P の食塩水の濃度は何% になるか。 x, y を用いて表せ。

- (2) 下線部 (イ) から、 y を x の式で表せ。

- (3) 下線部 (ウ) から、 y を x の式で表せ。

- (4) x, y の値を求めよ。



$$\text{濃度} = \frac{\text{食塩の量}}{\text{食塩水の量}} \times 100 \quad (\%)$$

(1) A だけを 10 分間流し込むと次の状態になる。

$$\begin{array}{c} x\% \quad y\% \\ 10\text{L} \quad + \quad 1.5 \times 10 (\text{L}) = 15\text{L} \end{array}$$

- 食塩の量 $10 \times \frac{x}{100} + 15 \times \frac{y}{100}$

- 食塩水の量 $10 + 15 = 25$

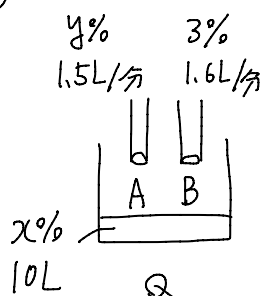
- 濃度 $= \frac{10 \times \frac{x}{100} + 15 \times \frac{y}{100}}{25} \times 100$
 $= \left(10 \times \frac{x}{100} \times \frac{1}{25} + 15 \times \frac{y}{100} \times \frac{1}{25} \right) \times 100$
 $= \left(\frac{x}{250} + \frac{3}{500} y \right) \times 100 = \frac{2x + 3y}{5} \times 100$
 $= \frac{2x + 3y}{5} (\%) //$

- (2)

B から 3% の食塩水を入れても この濃度が変化しない ということは、
 $\frac{2x + 3y}{5} = 3$ ということ。濃度が異なる食塩水を混ぜれば濃度は変わる。

$$\therefore \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{より} \end{array} 2x + 3y = 15 \quad y = \frac{-2x + 15}{3} //$$

- (3)



20 分間 A+B を入れると、

- 食塩水の量は、 $10 (\text{L}) + 1.5 \times 20 (\text{L}) + 1.6 \times 20 (\text{L})$
 $= 10 + 30 + 32 (\text{L}) = 72 (\text{L})$

- 食塩の量は、 $10 \times \frac{x}{100} + 1.5 \times 20 \times \frac{y}{100} + 1.6 \times 20 \times \frac{3}{100}$

- 濃度 $= \frac{10x + 30y + 96}{72} \div 100$

~ 5 ~

• 濃度 = $\frac{10x + 30y + 96}{100} \div 72 \times 100$ この濃度が 2.5% なので

$$\frac{10x + 30y + 96}{100} \div 72 \times 100 = 2.5 \quad \text{と仮定}$$

$$\frac{10x + 30y + 96}{72} = 2.5, \quad 10x + 30y + 96 = 180$$

$$y = \frac{-5x + 42}{15}$$

(4) (2) の $y = \frac{-2x + 15}{3}$ に $y = \frac{-5x + 42}{15}$ を代入すると

$$\frac{-2x + 15}{3} = \frac{-5x + 42}{15} \quad \xrightarrow{\times 15} \quad \begin{aligned} 5(-2x + 15) &= -5x + 42 \\ -10x + 75 &= -5x + 42 \end{aligned}$$

$$33 = 5x$$

$$x = \frac{33}{5}$$

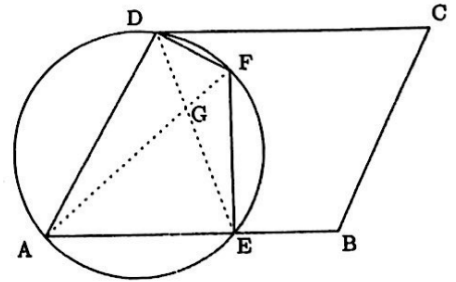
$$x = \frac{33}{5} \text{ と } y = \frac{-5x + 42}{15} \text{ に代入して}$$

$$y = \frac{-5 \times \frac{33}{5} + 42}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

以上より $(x, y) = \left(\frac{33}{5}, \frac{3}{5} \right)$

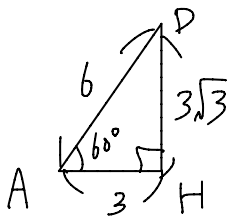
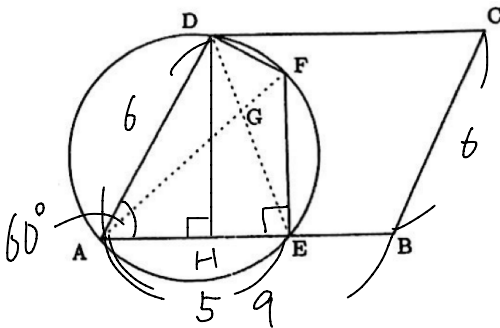
5.

5. 平行四辺形 ABCD において、 $AB = 9$, $BC = 6$, $\angle BAD = 60^\circ$ である。また、辺 AB 上の点 E と、点 A, D を通る円 O がある。点 E を通り辺 AB に垂直な直線と円 O との交点のうち点 E ではないものを F とする。AE = 5 であるとき、次の各問に答えよ。



- (1) 平行四辺形 ABCD の面積を求めよ。
- (2) DE の長さを求めよ。
- (3) 円 O の直径の長さを求めよ。
- (4) AF と DE の交点を G とする。△AGD ≅ △EGF を証明せよ。

(1)



• 平行四辺形の対辺は等しく
 $AD = BC = 6$

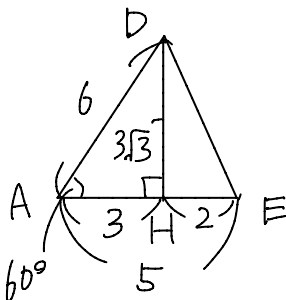
• $\angle DAB = 60^\circ$, D から AB への垂線を引くと, $\triangle ADH$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形となる。

• $AH : AD : DH = 1 : 2 : \sqrt{3}$ の
 上からなるので $DH = 3\sqrt{3}$

∴ 平行四辺形の高さ $DH = 3\sqrt{3}$ となる

$$\square ABCD = AB \times DH = 9 \times 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$$

(2)



現在の状況は左である。

△DHE で三平方を用いて

$$DE = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{27 + 4} = \sqrt{31}$$

