

滝高等学校 (H29 数学)

(100点満点 60分)

1. 次の問いに答えなさい。

(1) $(-2x^2yz^2)^2 \times \left(-\frac{3}{8}xy^2\right) \div \frac{9}{4}xyz^2$ を簡単にせよ。

- (2) y は x に反比例し、 $x = 6$ のとき $y = -\frac{3}{2}$ である。 x 、 y の関係を表すグラフ上の点で、 x 座標と y 座標がともに整数である点の個数を求めよ。

(3) $a^2b - 4a^2 + 16 - 4b$ を因数分解せよ。

- (4) 1 辺の長さが12の立方体がある。この立方体の各面の対角線の交点を頂点とする正八面体の体積を求めよ。

2.

濃度 $a\%$ の食塩水 A と濃度 $b\%$ の食塩水 B がある。食塩水 A を 300 g と食塩水 B を 100 g を混ぜると濃度 5 % の食塩水 C となり、食塩水 A を 100 g と食塩水 B を 700 g と水 200 g を混ぜると濃度 8 % の食塩水 D となる。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) a , b の値を求めよ。
- (2) 食塩水 A と食塩水 B を混ぜて 6 % の食塩水をつくるためには、食塩水 A と食塩水 B はどのような質量の割合で混ぜたらよいか。最も簡単な整数比で答えよ。

3.

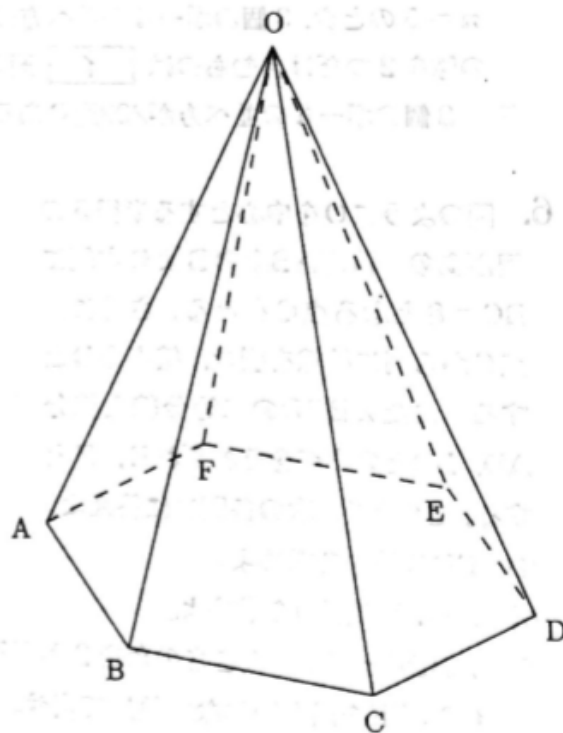
正六角錐O-ABCDEFがあり、底面ABCDEFは1辺の長さが6の正六角形で、 $OA=OB=OC=OD=OE=OF$ をみたす。

また、P, Q, R, S, T, UはそれぞれOA, OB, OC, OD, OE, OFの midpointであり、正六角

錐O-PQRSTUの体積は $\frac{27\sqrt{6}}{2}$ である。このと

き、次の各問いに答えよ。

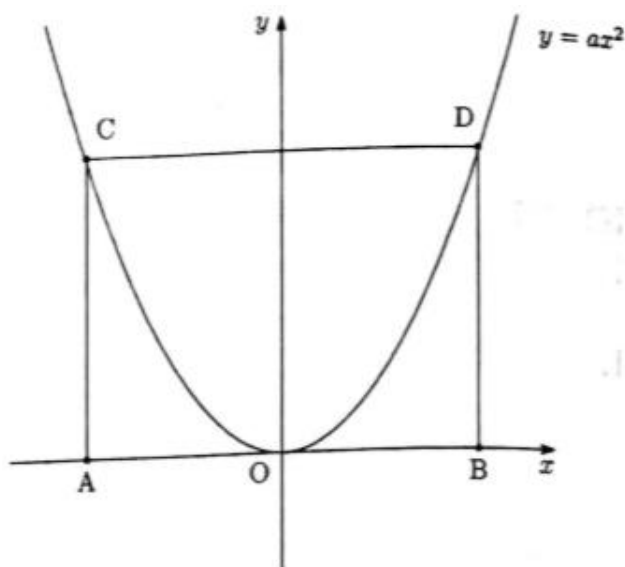
- (1) 正六角形ABCDEFの面積を求めよ。
- (2) 正六角錐O-ABCDEFの体積を求めよ。
- (3) OAの長さを求めよ。



4.

放物線 $y = ax^2$ は点 $(3, 12)$ を通る。 x 軸上に2点 $A(-t, 0)$, $B(t, 0)$ があり, A を通り y 軸に平行な直線と放物線 $y = ax^2$ との交点を C とし, B を通り y 軸に平行な直線と放物線 $y = ax^2$ との交点を D とする。ただし, $t > 0$ である。このとき, 次の各問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 四角形 $ABDC$ が, 直線 $y = 2x - 2$ によって2つの図形に分けられるとする。このうち一方が面積3の三角形になるような t の値を求めよ。
- (3) 四角形 $ABDC$ が正方形となるように t の値を定めよ。また, このとき, 正方形 $ABDC$ が直線 $y = \frac{1}{3}x + b$ によって2つの図形に分けられるとする。この2つの図形の面積比が $3 : 1$ となるような b の値をすべて求めよ。



5.

①から⑦までの整数を書いたボールがそれぞれ3個ずつ合計 $3n$ 個ある。これらのボールを、次のルール(a), (b), (c)に従って、左から順に何個か横一列に並べる。

- (a) 左端は何を置いてもよい。
- (b) ①の球の右隣りに球を置く場合は何を置いてもよい。
- (c) ①以外の球の右隣りに球を置く場合は①を置く。

このとき、次の各問いに答えよ。

(1) $n = 5$ のとき、2個のボールの並べ方は何通りあるか。

(2) 次の空欄 と を埋めよ。

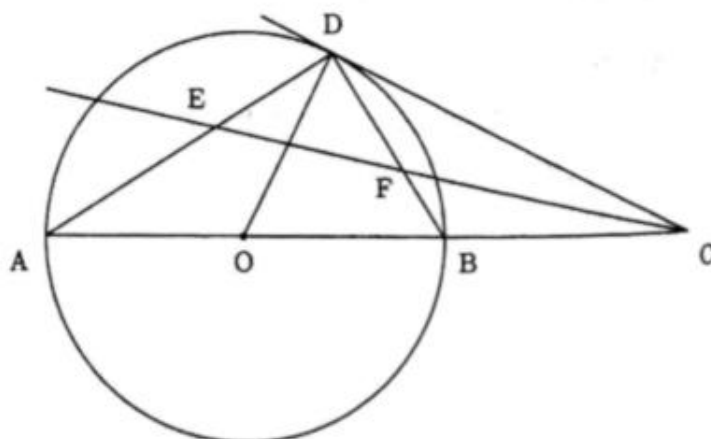
$n = 5$ のとき、3個のボールの並べ方のうち、①の球を1つだけ含むものは 通りあり、①の球を2つだけ含むものは 通りある。

(3) 3個のボールの並べ方が209通りあるとき、 n の値を求めよ。

6.

図のようにOを中心とする半径5の円があり、直線AB上のBより右側に $BC=8$ となる点Cをとる。さらに、点Cから円に接線を引き、接点をDとする。また $\angle BCD$ の二等分線と線分AD, BDとの交点をそれぞれE, Fとする。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) CDの長さを求めよ。
- (2) $\triangle OBD$ の面積を求めよ。
- (3) $\angle BDC$ と等しい大きさの角を2か所答えよ。
- (4) $CF:FE$ を最も簡単な整数比で表せ。



滝高等学校 (H29 数学)

(100点満点 60分)

1. 次の問いに答えなさい。

(1) $(-2x^2yz^2)^2 \times \left(-\frac{3}{8}xy^2\right) \div \frac{9}{4}xyz^2$ を簡単にせよ。

$$= (-2x^2yz^2)^2 \times \left(-\frac{3xy^2}{8}\right) \times \frac{4}{9xyz^2}$$

$$= \frac{(-2x^2yz^2) \times (-2x^2yz^2) \times (-3xy^2) \times 4}{\cancel{2} \cancel{8} \times \cancel{9} \cancel{x} \cancel{y} \cancel{z^2} \times \textcircled{3}}$$

$$= -\frac{2}{3}x^4y^3z^2$$

↑↑3h

$$(-2x^2yz^2)^2 = 4x^4y^2z^4 \text{ となり}$$

前から計算にたよいて。

Point 指数法則

$$\cdot a^p \times a^q = a^{p+q}$$

$$\cdot (ab)^p = a^p b^p$$

$$\cdot a^p \div a^q = a^{p-q}$$

$$\cdot (a^p)^q = a^{pq}$$

$$\cdot \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

$$\cdot a^0 = 1 \quad \cdot a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

(2) y は x に反比例し、 $x=6$ のとき $y=\frac{3}{2}$ である。 x, y の関係を表すグラフ上の点で、 x 座標と y 座標がともに整数である点の個数を求めよ。

① $y = \frac{a}{x}$ を表される。 ← 代入する。 ②

③ $\therefore y = \frac{9}{x}$ ← $\frac{3}{2} = \frac{a}{6} \xrightarrow{\times 6} a = 9$

「 x, y 座標がともに整数」 → 「 x, y ともに9の約数」

「 x が9の約数ならば y も整数になるので9の約数をあげる。」 (負の数も考える)

↓

「 $x = -9, -3, -1, 1, 3, 9$ の6通り」

よって 6個 //

⑧だけ
考えは
よい

(3) $a^2b - 4a^2 + 16 - 4b$ を因数分解せよ。 $\downarrow$ (~~※~~ 1)

(X1)

$$= a^2b - 4b - 4a^2 + 16$$

$$= b(a^2 - 4) - 4(a^2 - 4)$$

$$= (b-4)(a^2-4)$$

$$= (b-4)(a+2)(a-2)$$

$$M = a^2 - 4 \text{ とおくと}$$

6M-4M

$$= (b-4) \times M$$

$$(\times 2)$$

Point (*)

因数分解 $\Rightarrow$ 進入了中乙

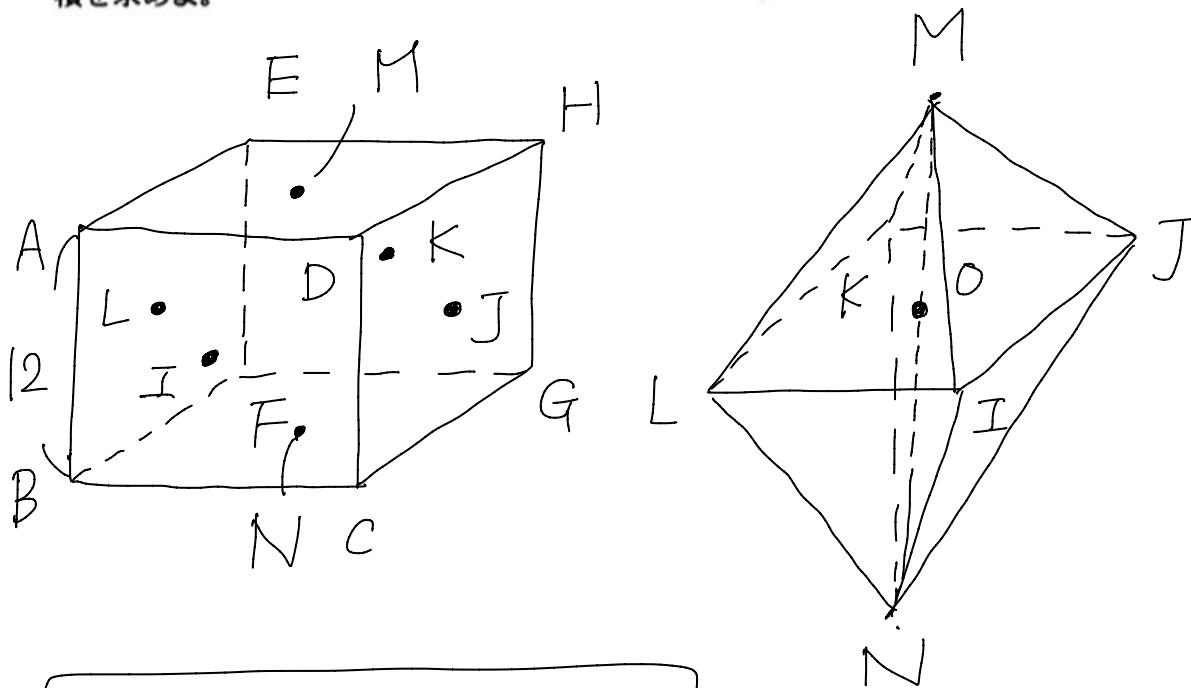
共通因数 a 出てくように

項を並びかえる。(交換法則)

Point (※2)

因数分解は飛ぶところまで行う。

- (4) 1辺の長さが12の立方体がある。この立方体の各面の対角線の交点を頂点とする正八面体の体積を求めよ。



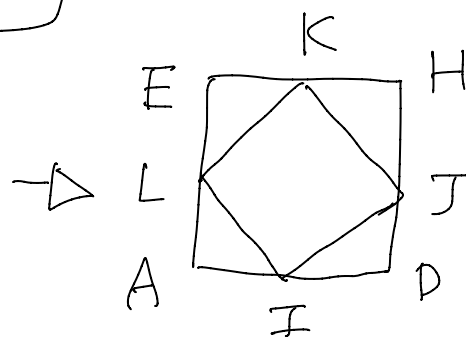
求める立体の体積 V

$$= \text{四角錐 } M-LIJK \times 2$$

(四角錐 $N-LIJK$ も同じなので)

底面 $LIJK = \square ADHE$ の半分

$$= 12 \times 12 \times \frac{1}{2} = 72$$



高さ $OM =$ 立方体の高さの半分

$$= 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$\begin{aligned} \text{よって } V &= \left(72 \times 6 \times \frac{1}{3} \right) \times 2 \\ &= 288 \end{aligned}$$

Point

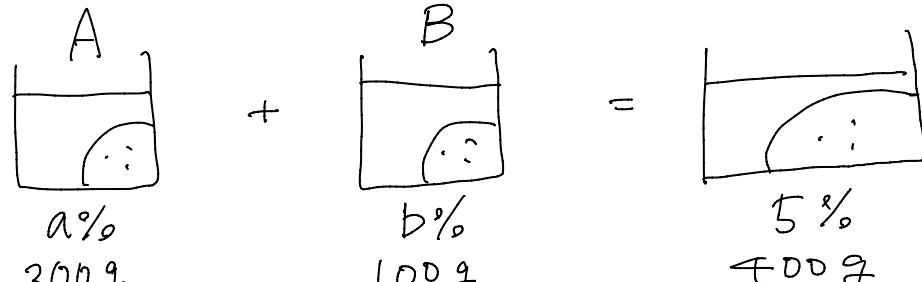
- 図に表せること
- 平面(切断面)で考えられること

2.

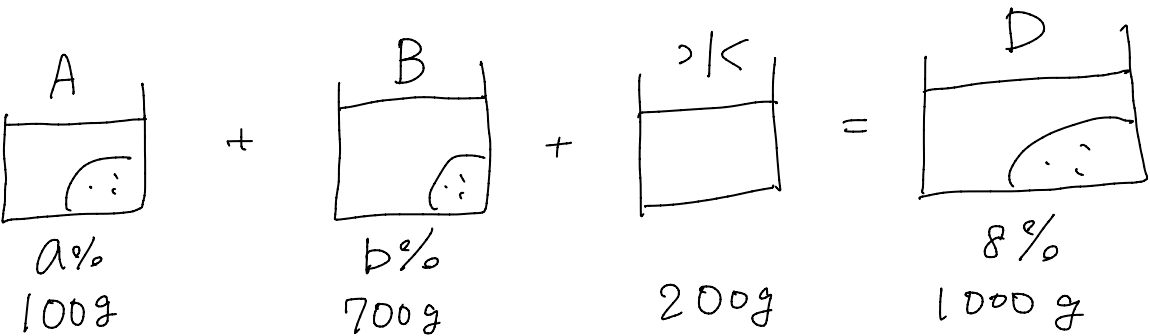
濃度 $a\%$ の食塩水 A と濃度 $b\%$ の食塩水 B がある。食塩水 A を 300 g と食塩水 B を 100 g を混ぜると濃度 5% の食塩水 C となり、食塩水 A を 100 g と食塩水 B を 700 g と水 200 g を混ぜると濃度 8% の食塩水 D となる。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) a, b の値を求めよ。
 (2) 食塩水 A と食塩水 B を混ぜて 6% の食塩水をつくるためには、食塩水 A と食塩水 B はどのような質量の割合で混ぜたらよいか。最も簡単な整数比で答えよ。

(1)



$$\text{塩} \quad 300 \times \frac{a}{100} + 100 \times \frac{b}{100} = 400 \times \frac{5}{100}$$



$$\text{塩} \quad 100 \times \frac{a}{100} + 700 \times \frac{b}{100} + 0 = 1000 \times \frac{8}{100}$$

$$\begin{cases} 3a + b = 20 \\ a + 7b = 80 \end{cases} \rightarrow (a, b) = (3, 11)$$

Point
 塩の量は混ぜる前の和も後の量も等しいので上の式を作った。

(2) $A \text{ を } x \text{ g} + B \text{ を } y \text{ g} = 6\% \text{ の } x+y \text{ g}$

$$x \times \frac{3}{100} + y \times \frac{11}{100} = (x+y) \times \frac{6}{100}$$

→ 整理すると $y = \frac{3}{5}x$ よって $x : y = x : \frac{3}{5}x \downarrow \times 5$
 $= 5 : 3 //$

3.

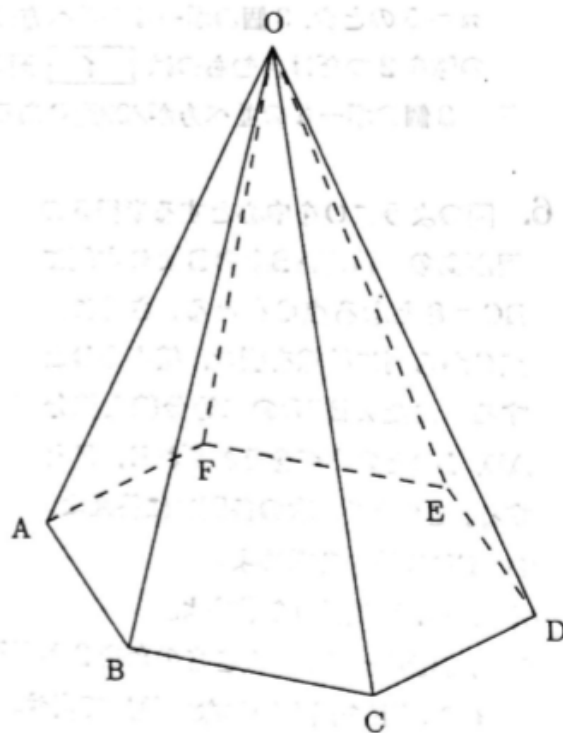
正六角錐O-ABCDEFがあり、底面ABCDEFは1辺の長さが6の正六角形で、 $OA=OB=OC=OD=OE=OF$ をみたす。

また、P、Q、R、S、T、UはそれぞれOA、OB、OC、OD、OE、OFの midpointであり、正六角

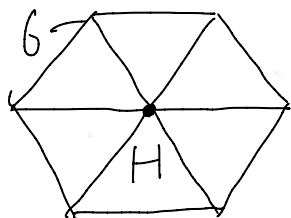
錐O-PQRSTUの体積は $\frac{27\sqrt{6}}{2}$ である。このと

き、次の各問いに答えよ。

- (1) 正六角形ABCDEFの面積を求めよ。
- (2) 正六角錐O-ABCDEFの体積を求めよ。
- (3) OAの長さを求めよ。



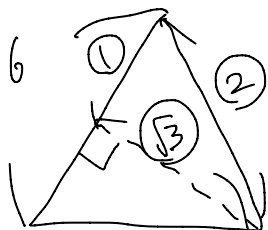
(1)



正六角形は
正三角形
6つの集まり
なので1つの

正三角形の
面積を求めよ。

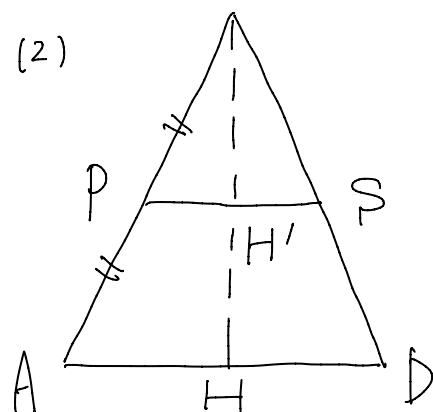
① : ② : ③ なので、
3 : 6 : $3\sqrt{3}$ となる。



$$\therefore \Delta = 6 \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{よって} 6 \text{ 個あるので } 9\sqrt{3} \times 6 = 54\sqrt{3} //$$

(2)



PがOAの midpoint なので
 $AH:PH' = 2:1$ となる

正六角形 ABCDEF: PQRSTU

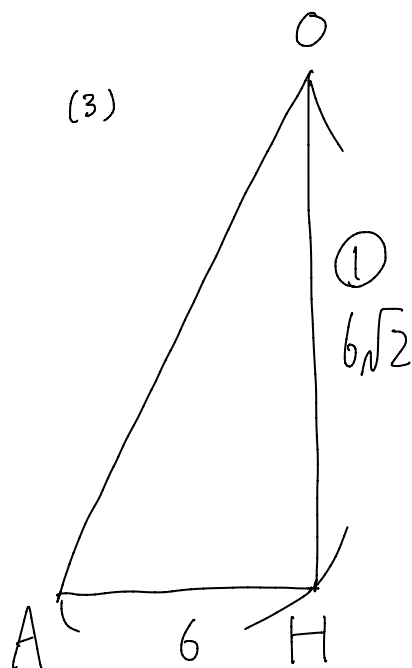
の相似比は $2:1$ なので

体積比は $2^3:1^3 = 8:1$

正六角錐 O-ABCDEF は

$$\frac{27\sqrt{6}}{2} \times 8 = 108\sqrt{6} //$$

(3)



① (2)より 正六角錐 O-ABCDEF の
体積 = 底面積 $\times$ 高さ $\div 3$ $\times \frac{1}{3}$
となるので、 (1)の答え

$$108\sqrt{6} = 54\sqrt{3} \times OH \times \frac{1}{3}$$

$$OH = \frac{108\sqrt{6}}{18\sqrt{3}} = 6\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \triangle OAH \text{ において } OA^2 &= AH^2 + OH^2 \\ &= 36 + 72 = 108 \end{aligned}$$

$$\therefore OA = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

Point

小問集合の場合

(1) や (2) といった、

前の問題からの

つみ重ねになっている

いる意識をもちろ。

Point

よく出る長さ、面積は
公式化して
スライドUPへ。

正三角形 (1辺 r)

高さ $\times$ 面積

$$\bullet \text{ 高さ} = \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

$$\bullet \text{ 面積} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

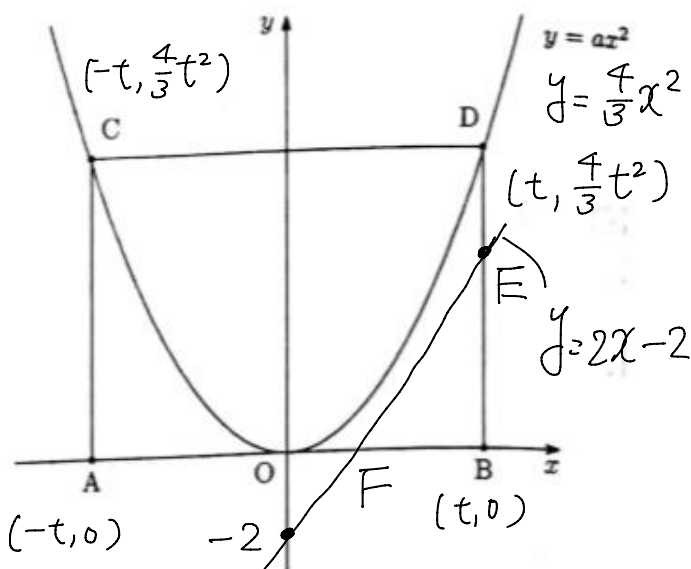
4.

放物線 $y = ax^2$ は点 $(3, 12)$ を通る。 x 軸上に2点 $A(-t, 0)$ 、 $B(t, 0)$ があり、 A を通り y 軸に平行な直線と放物線 $y = ax^2$ との交点を C とし、 B を通り y 軸に平行な直線と放物線 $y = ax^2$ との交点を D とする。ただし、 $t > 0$ である。このとき、次の各問いに答えよ。

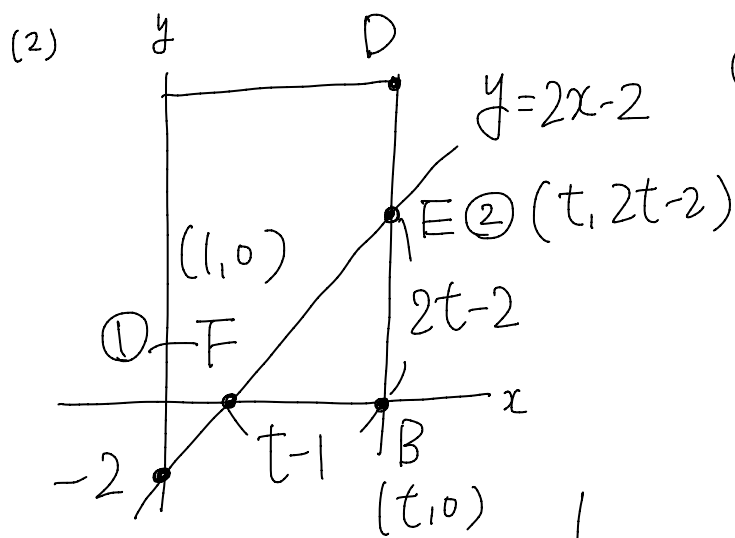
(1) a の値を求めよ。

(2) 四角形 $ABDC$ が、直線 $y = 2x - 2$ によって2つの図形に分けられるとする。このうち一方が面積3の三角形になるような t の値を求めよ。

(3) 四角形 $ABDC$ が正方形となるように t の値を定めよ。また、このとき、正方形 $ABDC$ が直線 $y = \frac{1}{3}x + b$ によって2つの図形に分けられるとする。この2つの図形の面積比が3:1となるような b の値をすべて求めよ。



(1) $y = ax^2$ は $(3, 12)$ を通るので $x=3, y=12$ を代入する。
 $12 = a \times 3^2 \quad a = \frac{4}{3}$
 $a = \frac{4}{3}$



① $y = 2x - 2$ と x 軸との交点を求める。

$y = 0$ は x 軸の式なので

$$0 = 2x - 2 \quad x = 1$$

$F(1, 0)$ とわかる。



よって $\triangle FBE = FB \times BE \times \frac{1}{2}$ | ② E は BD ($x=t$) 上

$3 = (t-1)(2t-2) \times \frac{1}{2}$ の点なので

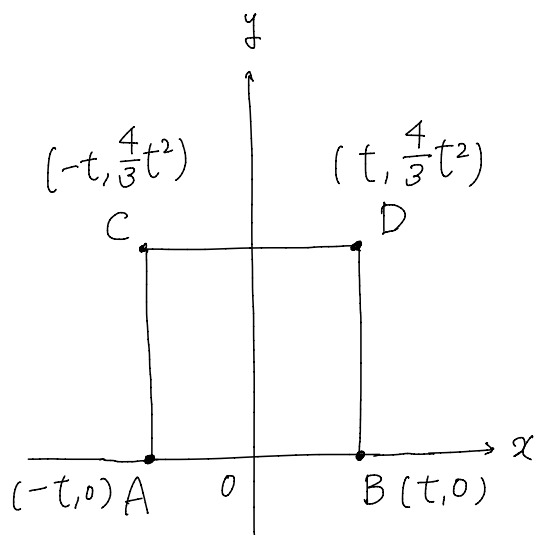
$$(t-1)^2 = 3 \rightarrow t-1 = \pm\sqrt{3}$$

$$t > 0 \text{ より } \leftarrow t = 1 \pm \sqrt{3}$$

$t = 1 + \sqrt{3}$

$$E(t, 2t-2)$$

(3)



② 4点A, B, C, Dの座標を求めよ。

$$A(-\frac{3}{2}, 0), B(\frac{3}{2}, 0)$$

$$C(-\frac{3}{2}, 3), D(\frac{3}{2}, 3)$$

$$\text{よ} \text{ } AB = 3, BD = 3 \text{ となる}$$

$$\square ABCD = 3 \times 3 = 9$$

① t の値を求める。

$\square ABCD$ が正方形なので

$$AB = BD \text{ である。}$$

$$AB = 2t, BD = \frac{4}{3}t^2$$

よ

$$2t = \frac{4}{3}t^2$$

$$\frac{4}{3}t^2 - 2t = 0$$

$$4t^2 - 6t = 0$$

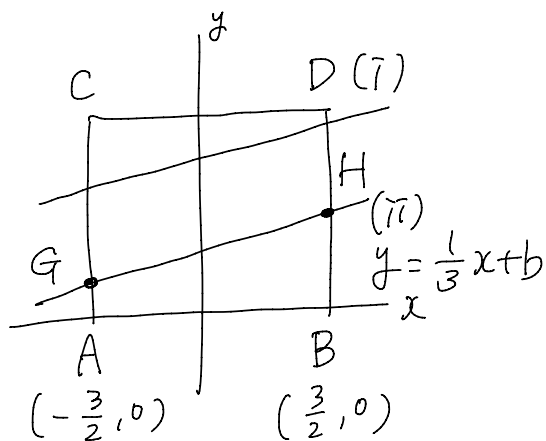
$$t(2t - 3) = 0$$

$$t = 0, \frac{3}{2}$$

$$t > 0 \text{ よ} \quad t = \frac{3}{2} //$$

③ 問題文より $3:1$ に分けると $9 \times \frac{3}{4} = \frac{27}{4}$ $9 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ (★)

の2つの面積が図形に分かれる。



$$\frac{1}{3} \times (-\frac{3}{2}) + b$$

$$= -\frac{1}{2} + b$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} + b$$

$$= \frac{1}{2} + b$$

G, H は 直線 AC, BD

上の点なので $y = \frac{1}{3}x + b$

に $x = -\frac{3}{2}, x = \frac{3}{2}$ を代入

すると G, H の座標が

求まる。

$$\square GABH = \left\{ (-\frac{1}{2} + b) + (\frac{1}{2} + b) \right\} \times 3 \times \frac{1}{2}$$

$$= 3b$$

$\square GABH$ は (★) より $\frac{27}{4}$ のとき $\frac{9}{4}$ のとき 2通りある。

$$3b = \frac{27}{4} \rightarrow b = \frac{9}{4}, \quad 3b = \frac{9}{4} \rightarrow b = \frac{3}{4} \quad b = \frac{9}{4}, \frac{3}{4} //$$

5.

①から⑦までの整数を書いたボールがそれぞれ3個ずつ合計3n個ある。これらのボールを、次のルール(a), (b), (c)に従って、左から順に何個か横一列に並べる。

- (a) 左端は何を置いてもよい。
- (b) ①の球の右隣りに球を置く場合は何を置いてもよい。
- (c) ①以外の球の右隣りに球を置く場合は①を置く。

このとき、次の各問いに答えよ。

(1) $n = 5$ のとき、2個のボールの並べ方は何通りあるか。

(2) 次の空欄 ア と イ を埋めよ。

$n = 5$ のとき、3個のボールの並べ方のうち、①の球を1つだけ含むものは ア 通りあり、①の球を2つだけ含むものは イ 通りある。

(3) 3個のボールの並べ方が209通りあるとき、 n の値を求めよ。

(1) A B 場合分けをする。

(i) 1 B のとき ... B は 1 ~ 5 の 5通りが入れる。

(ii) A B
2 ~ 5 のとき ... B は 1 (が並べられないので) A の 2 ~ 5 の 4通り。 よって $5 + 4 = 9$ 通り //

(2)

①を1つだけ含む場合

•
1
1
 $= 4 \times 4 = 16$ 通り A
(2~5) (2~5) ———— //

①を2つだけ含む場合

•
1
1
1
 $= 4$ 通り
2~5

•
1
1
1
 $= 4$ 通り
2~5

•
1
1
1
 $= 4$ 通り

} $4 \times 3 = 12$ 通り イ
————— //

(3) (2) の考え方を元考える。

① を 1 つだけ含む場合

$$\underbrace{\bigcirc}_{2 \sim n} \textcircled{1} \underbrace{\bigcirc}_{2 \sim n} = (n-1)^2 \text{通り}$$

($n-1$ 通りずつある)

① を 2 つだけ含む場合

$$\begin{array}{lcl} \bigcirc \textcircled{1} \textcircled{1} & = & n-1 \text{通り} \\ \textcircled{1} \textcircled{1} \bigcirc & = & \text{//} \\ \textcircled{1} \bigcirc \textcircled{1} & = & \text{//} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{lcl} \bigcirc \textcircled{1} \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \textcircled{1} \bigcirc \\ \textcircled{1} \bigcirc \textcircled{1} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} (n-1) \times 3 \\ 3(n-1) \text{通り} \end{array}$$

① を 3 つ含む場合

$$\textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} = 1 \text{通り}$$

$$\text{よって } (n-1)^2 + 3(n-1) + 1 = 209$$

$$n^2 - 2n + 1 + 3n - 3 + 1 - 209 = 0$$

$$n^2 + n - 210 = 0$$

$$(n+15)(n-14) = 0$$

$$n > 0 \text{ より } n = 14$$

————— //

