

滝高等学校 (H28 数学)

(100点満点 60分)

1. 次の問いに答えなさい。

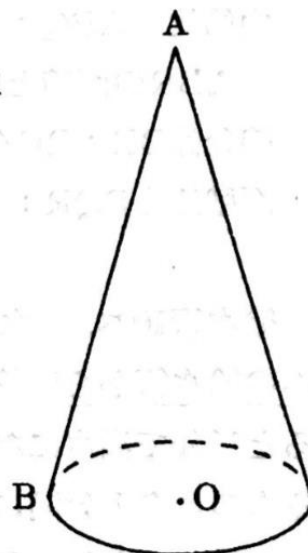
(1) $4x^2 - 16y^2$ を因数分解せよ。

(2) $6x - x^2 = 5$ を解け。

(3) 連立方程式 $\begin{cases} 3(x-1)+2(y+3)=8 \\ 2(x-1)-(y+3)=10 \end{cases}$ を解け。

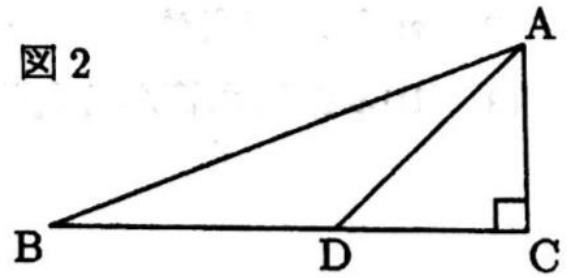
- (4) 右の図1のように、母線 $AB=12$ 、底面の半径 $OB=3$ の円すいがある。Bから円すいにひもを1回巻きつけてBに戻るとき、ひもの長さの最小値を求めよ。

図1



- (5) 右の図2のように、 $AC=CD=1$ ， $AD=BD$ ， $\angle C=90^\circ$ の直角三角形がある。 AB^2 の値を求めよ。

図2



2.

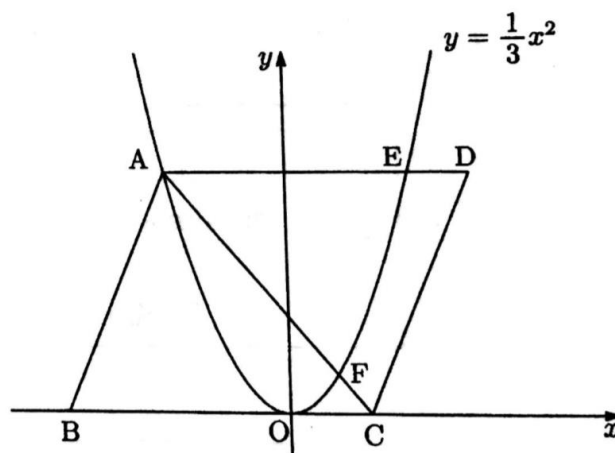
大中小の3個のサイコロを1回投げて、出た目をそれぞれ x , y , z とする。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) $x + y + z = 5$ となるのは、何通りあるか。
- (2) $x + y = z$ となるのは、何通りあるか。
- (3) $x < y < z$ となるのは、何通りあるか。

3.

図のように、4点A (−6, 12),
B (−12, 0), C (3, 0), Dを頂点とする
平行四辺形ABCDがある。点Aは放物線
 $y = \frac{1}{3}x^2$ 上にあり、放物線と辺AD, 対角線
ACの交点をそれぞれE, Fとする。このと
き、次の各問いに答えよ。

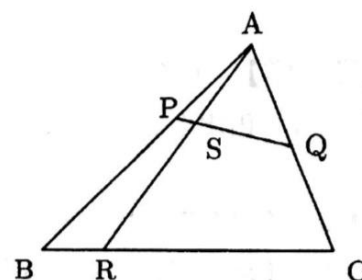
- (1) 直線ACの式を求めよ。
- (2) 点Fの座標を求めよ。
- (3) $\triangle AEF$ の面積を求めよ。



- (4) 放物線上を点Oから点Eまで動く点Pがある。 $\triangle AEP$ の面積が平行四辺形ABCDの面積の $\frac{2}{15}$ 倍になるとき、点Pの座標を求めよ。

4.

図のように、 $\triangle ABC$ の辺AB、辺AC上にそれぞれ点P、Qを
 $AP : PB = 1 : 2$ 、 $AQ : QC = 1 : 1$ となるようにとる。
辺BC上に点Rをとり、線分PQと線分ARの交点をSとする。
 $\triangle ASQ$ と四角形PBR Sの面積が等しいとき、次の各問いに答えよ。
ただし、比は最も簡単な整数の比で答えること。



- (1) 面積比 $\triangle APQ : \triangle ABC$ を求めよ。
- (2) $\triangle ABR$ の面積と等しい面積の三角形を、 $\triangle ABR$ 以外で1つ求めよ。
- (3) 線分比 $BR : RC$ を求めよ。
- (4) 面積比 $\triangle PQR : \triangle ABC$ を求めよ。

5.

給水管10本, 排水管1本がついた水槽がある。排水管を開けた状態で, 空の水槽に水を入れる。5本の給水管から同時に水を入れると20分で満水になった。また, 8本の給水管から同時に水を入れると11分で満水になった。給水管1本から入る水の量を1分間につき x リットル, 排水管から抜ける水の量を1分間につき y リットルとすると, 次の各問いに答えよ。

- (1) 下線部の条件を利用して, 水槽の容積を x と y で表せ。
- (2) y を x で表せ。
- (3) 10本の給水管から同時に水を入れると, 何分で満水になるか。

滝高等学校 (H28 数学)

(100点満点 60分)

1. 次の問いに答えなさい。

(1) $4x^2 - 16y^2$ を因数分解せよ。

$$= 4(x^2 - 4y^2)$$

$$= 4(x + 2y)(x - 2y)$$

_____ //

Point 因数分解

① 共通因数 を 見つけて () の 前へ 出す。

② $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ の 利用。

※ 公式 は 利用 できる ように して みる。

(2) $6x - x^2 = 5$ を解け。

整理すると, $x^2 - 6x + 5 = 0$
たしこ かけこ

かけこ 5 は

たしこ -6 かけこ

1, 5 のどちかこ -1, -5 のどちかこ

よ, 2

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$\underline{x = 1, 5}$$

(3) 連立方程式 $\begin{cases} 3(x-1)+2(y+3)=8 \\ 2(x-1)-(y+3)=10 \end{cases}$ を解け。

$$x-1=M, \quad y+3=N \text{ とおく}$$

$$\begin{cases} 3M+2N=8 & \dots \textcircled{1} \\ 2M-N=10 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 2$$

$$\begin{array}{r} 3M+2N=8 \\ +) 4M-2N=20 \\ \hline 7M \qquad = 28 \end{array}$$

$$M=4$$

①に $M=4$ を代入すると

$$\begin{array}{r} 3 \times 4 + 2N = 8 \\ 2N = -4 \\ N = -2 \end{array}$$

M と N を 2 ずつ 2 ずつ
ずらす式に直す。

$$M = x-1 = 4$$

$$\underline{x = 5}$$

$$N = y+3 = -2$$

$$\underline{y = -5}$$

$$(x, y) = (5, -5)$$

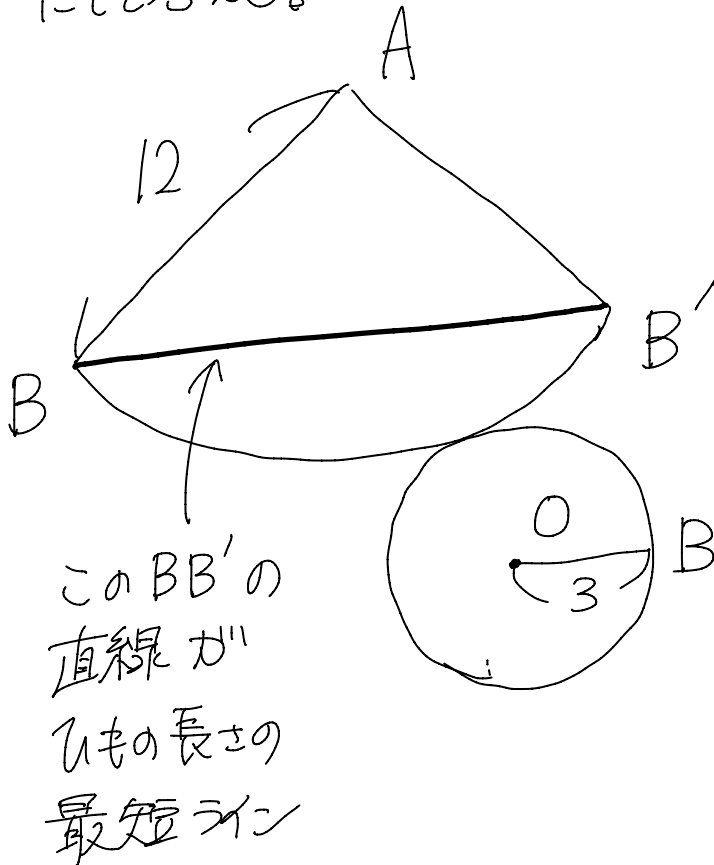
Point

同じ項が表れる
場合は文字で
おくと考えやすい。

~~~~~

- (4) 右の図1のように、母線 $AB=12$ 、底面の半径 $OB=3$ の円すいがある。Bから円すいにひもを1回巻きつけてBに戻るとき、ひもの長さの最小値を求めよ。

円錐を切り開き展開図  
にしてみる。



- ① おうぎ形の中心角を求める。

$$\begin{aligned}\widehat{BB'} &= \text{円Oの円周の長さ} \\ &= 3 \times 2 \times \pi = 6\pi\end{aligned}$$

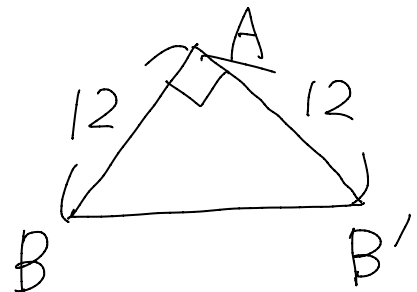
おうぎ形の中心角

$$\begin{aligned}&= 360^\circ \times \frac{\widehat{BB'}}{\text{おうぎ形の元の円周}} \\ &= 360^\circ \times \frac{6\pi}{12 \times 2 \times \pi} = 90^\circ\end{aligned}$$

図1



- ② 弦 $BB'$ の長さを求める。



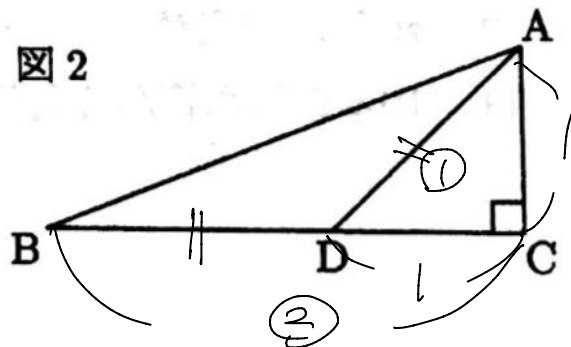
直角=等辺三角形  
なので  $1:1:\sqrt{2}$   
の比になり

$$BB' = 12\sqrt{2}$$

よってひもの長さの  
最小値  $= 12\sqrt{2}$

- (5) 右の図2のように,  $AC=CD=1$ ,  $AD=BD$ ,  $\angle C=90^\circ$  の直角三角形がある。  $AB^2$  の値を求めよ。

図2

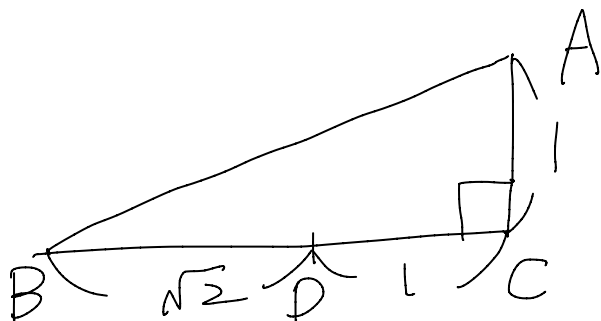


$AB^2$  を求めることから  
 $\triangle ABD$  の三平方の定理  
 を用いることが考えられる。

①  $AD$  の長さを求める。

$\triangle ADC$  は  $AC=CD$  の直角二等辺  
 三角形なので  $1:1:\sqrt{2}$  であるので  
 $AD = \sqrt{2}$

②  $BC$  の長さを求める。



よって  $BC = 1 + \sqrt{2}$

③ 三平方の定理

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 \\ &= 1^2 + (1 + \sqrt{2})^2 \\ &= 1 + 1 + 2\sqrt{2} + 2 \\ &= 4 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

//

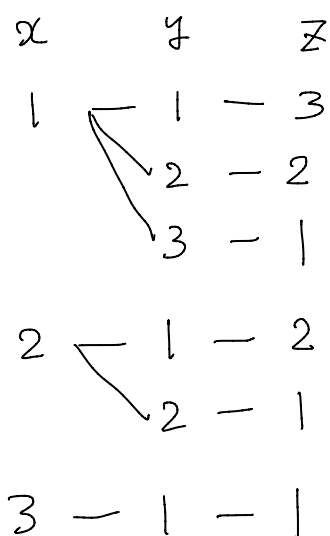
2.

大中小の3個のサイコロを1回投げて、出た目をそれぞれ  $x, y, z$  とする。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1)  $x + y + z = 5$  となるのは、何通りあるか。
- (2)  $x + y = z$  となるのは、何通りあるか。
- (3)  $x < y < z$  となるのは、何通りあるか。

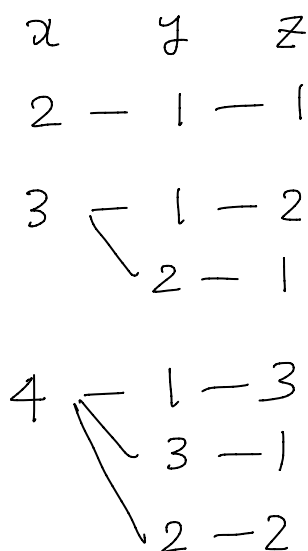
Point  
難しいような問題も樹形図で考えます。

(1) の樹形図



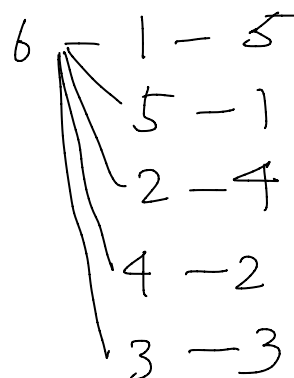
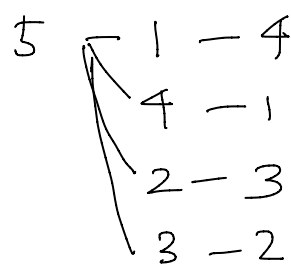
よって 5通り  
#

(2) の樹形図

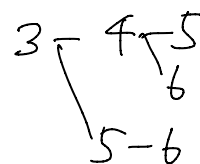
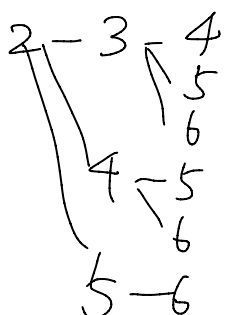
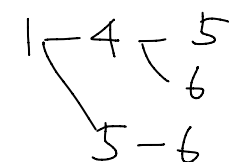
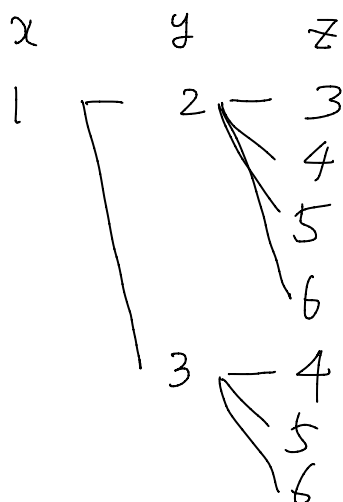


以上 15通り  
#

$x$        $y$        $z$



(3)



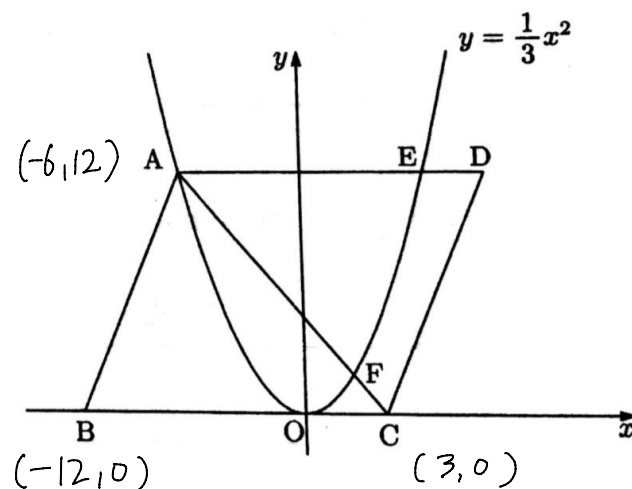
4-5-6

20通り

#

3.

図のように、4点A  $(-6, 12)$ ,  
B  $(-12, 0)$ , C  $(3, 0)$ , Dを頂点とする  
平行四辺形ABCDがある。点Aは放物線  
 $y = \frac{1}{3}x^2$  上にあり、放物線と辺AD, 対角線  
ACの交点をそれぞれE, Fとする。このと  
き、次の各問いに答えよ。



- (1) 直線ACの式を求めよ。
- (2) 点Fの座標を求めよ。
- (3)  $\triangle AEF$ の面積を求めよ。

- (4) 放物線上を点Oから点Eまで動く点Pがある。 $\triangle AEP$ の面積が平行四辺形ABCDの面積の $\frac{2}{15}$ 倍になるとき、点Pの座標を求めよ。

(1) 2点から傾きと切片を求める。  

$$\begin{aligned} & \text{傾き} = \frac{0 - 12}{3 - (-6)} = \frac{-12}{9} = -\frac{4}{3} \\ & \text{切片} = 4 \end{aligned}$$

$$y = -\frac{4}{3}x + 4$$

よって傾き  $a = -\frac{4}{3}$   
 $y = -\frac{4}{3}x + b$   
 $(3, 0)$  を通るので  
 $0 = -\frac{4}{3} \times 3 + b \quad b = 4$

- (2) FはAC  $(y = -\frac{4}{3}x + 4)$  と  $y = \frac{1}{3}x^2$  との交点なので  
連立方程式として解くと、求められる。

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + 4 & \dots ① \\ y = \frac{1}{3}x^2 & \dots ② \end{cases}$$

②を①に代入すると  

$$\frac{1}{3}x^2 = -\frac{4}{3}x + 4$$

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$(x+6)(x-2) = 0$$

$$x = -6, 2$$

$x = 2$  のときがFなので  

$$y = \frac{1}{3} \times 2^2 = \frac{4}{3}$$

$$F(2, \frac{4}{3})$$

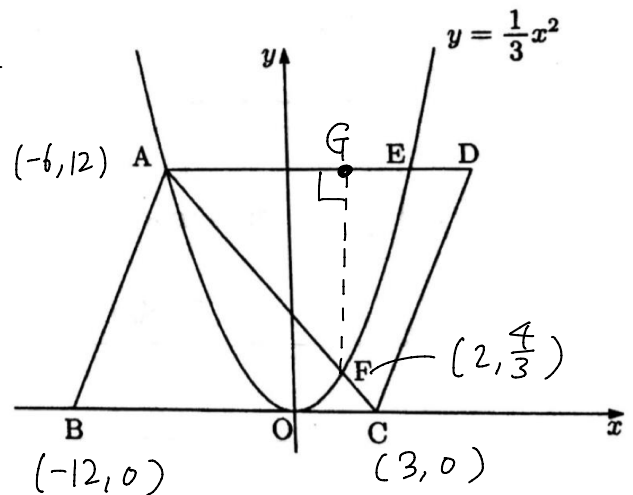


### (3) $\triangle AEF$ の面積

$$\triangle AEF = AE \times GF \times \frac{1}{2}$$

①      ②

①、②の長さを順に求める。



①

Eの座標を

$y = \frac{1}{3}x^2$ とADの交点、

であることをから求める。

x軸と平行なグラフと

2次関数の交点はy軸対称

なので  $E(6, 12)$  となる。

よって  $AE = 12$

~~~~~ ①

②

Fを通りy軸に
平行でADとの
交点をGとすると

Fのx座標と等しく
なるので

$$G(2, 12)$$

$$GF = 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$$

~~~~~ ②

①、②より

$$\triangle AEF = AE \times GF \times \frac{1}{2}$$

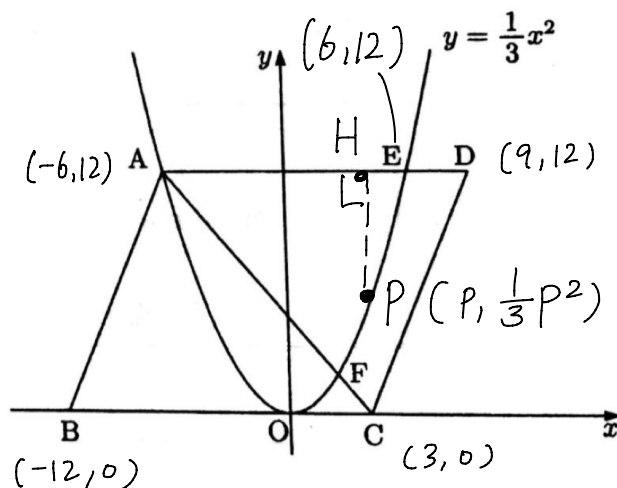
$$= 12 \times \frac{32}{3} \times \frac{1}{2} = 64$$

~~~~~ //

(4) 目標

$$\square ABCD \times \frac{2}{15} = \triangle AEP$$

となる放物線上の
点Pの座標を求める。



① BとAの位置関係と

$\square ABCD$ が平行四辺
形であることから

$D(9, 12)$ となる

$$\square ABCD = BC \times \text{高さ} 12$$

で求めることができる。

$$= 15 \times 12 = 180$$

②

Pは $y = \frac{1}{3}x^2$ の点
なので、x座標を

pとすると、Pは

$$P\left(p, \frac{1}{3}p^2\right)$$

と表せる。

③

(3) 同様に点Hをとくと

$H(p, 12)$ なので HP の

長さは $12 - \frac{1}{3}p^2$

$$\triangle AEP = AE \times HP \times \frac{1}{2}$$

$$= 12 \times \left(12 - \frac{1}{3}p^2\right) \times \frac{1}{2}$$

$$= 72 - 2p^2$$

$$\textcircled{4} \square ABCD \times \frac{2}{15} = \triangle AEP$$

$$180 \times \frac{2}{15} = 72 - 2p^2$$

$$2p^2 = 48, p = \pm 2\sqrt{6}$$

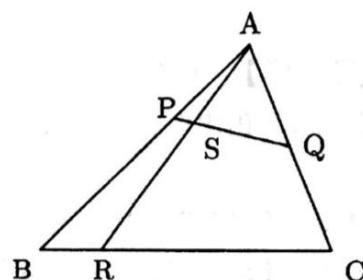
$$p > 0 \text{ より } 2\sqrt{6}$$

$$\text{よって } P\left(2\sqrt{6}, \frac{1}{3}(2\sqrt{6})^2\right)$$

$$= P(2\sqrt{6}, 8)$$

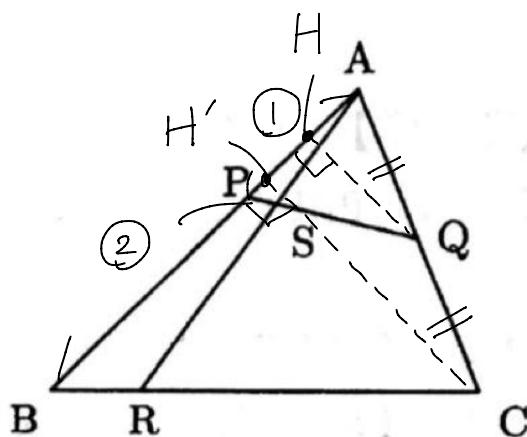
図のように、 $\triangle ABC$ の辺AB、辺AC上にそれぞれ点P、Qを
 $AP:PB=1:2$ 、 $AQ:QC=1:1$ となるようにとる。

辺BC上に点Rをとり、線分PQと線分ARの交点をSとする。
 $\triangle ASQ$ と四角形PBR Sの面積が等しいとき、次の各問いに答えよ。
 ただし、比は最も簡単な整数の比で答えること。



- (1) 面積比 $\triangle APQ : \triangle ABC$ を求めよ。
- (2) $\triangle ABR$ の面積と等しい面積の三角形を、 $\triangle ABR$ 以外で1つ求めよ。
- (3) 線分比 $BR : RC$ を求めよ。
- (4) 面積比 $\triangle PQR : \triangle ABC$ を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad \triangle APQ &= AP \times QH \times \frac{1}{2} \\ \triangle ABC &= AB \times CH' \times \frac{1}{2} \\ &\text{で求めて 比を求める。} \end{aligned}$$



- ① 右図のように Q, C から
 AB への垂線を引き、
 H, H' とすると
 QH は $\triangle APQ$ の高さ
 CH' は $\triangle ABC$ の高さ
 になる。

QH : CH' を考えるために
 $\triangle ACH'$ と $\triangle AQH$ の
 相似な図形の $AQ = QC$
 を用いると、

$$QH : CH' = \boxed{1} : \boxed{2} \text{ となる。}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \triangle APQ &= AP \times QH \times \frac{1}{2} \\ &= \textcircled{1} \times \boxed{1} \times \frac{1}{2} \\ &= \triangle \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= AB \times CH' \times \frac{1}{2} \\ &= \textcircled{3} \times \boxed{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \triangle 3 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} : 3 = 1 : 6 //$$

(2)

$\triangle ABR$ と等しい面積の 三角形 を1つ 見つける。

問題文 から

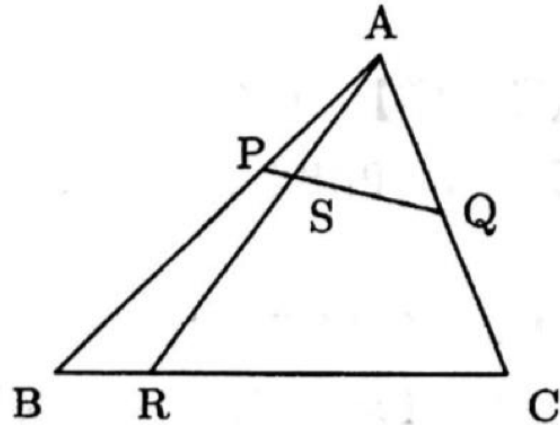
$$\triangle ASQ = \square PBR S$$

なので、この2つの図形に

同じ形の図を加えても

面積は等しいので

$\triangle APS$ を加える。



$$\underbrace{\triangle ASQ + \triangle APS}_{\parallel \triangle APQ} = \underbrace{\square PBR S + \triangle APS}_{\parallel \triangle ABR}$$

よって $\triangle ABR$ と等しいのは $\triangle APQ$ である。
——— //

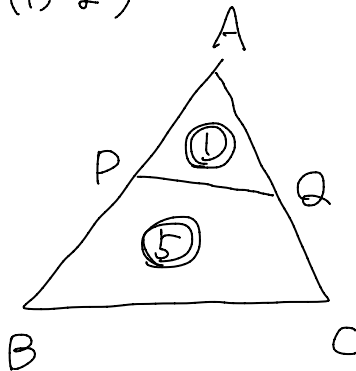
(別解) $AQ = QC$ なので 底辺が等しく高さが
等しい三角形は面積が等しいので

$$\triangle APQ = \triangle PCQ \quad \text{となる。}$$

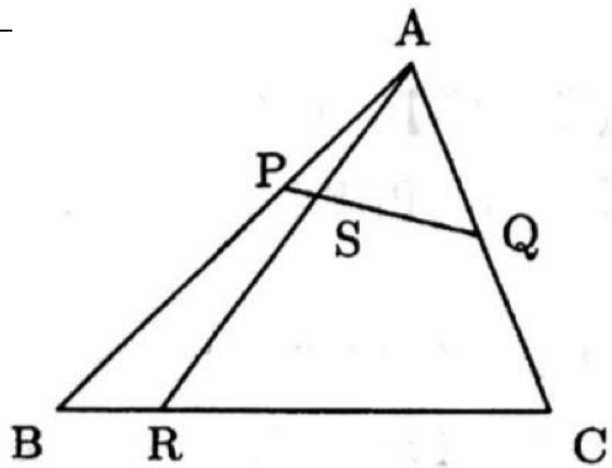
$\triangle PCQ$ も 答 となる。
——— //

(3) $BR = RC$ を求める。

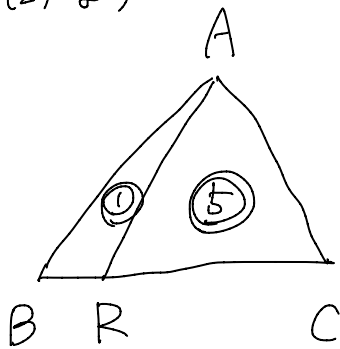
(1) より



◎は
面積比
を表す。



(2) より



となるので $\triangle ARC = \textcircled{5}$ となる。

$\triangle ABR$ と $\triangle ARC$ は 高さが
等しいので 面積比 = 底辺比
となる。つまり

$$\triangle ABR : \triangle ARC = BR : RC$$

$$\textcircled{1} : \textcircled{5} = 1 : 5$$

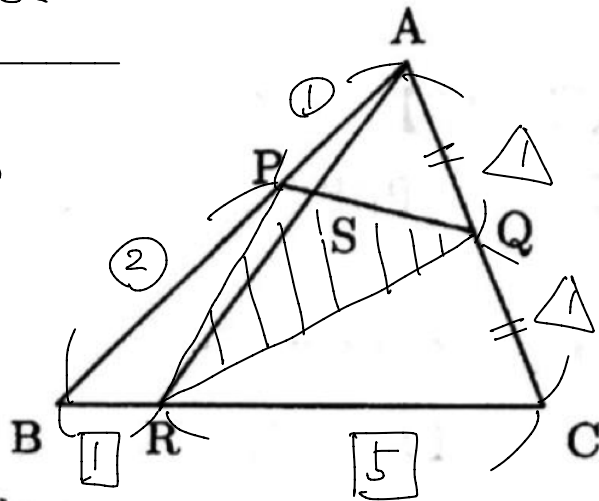
——— //

Point

大問 は (1) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (3) と
つながりがあるはずだと
頭に入れておくと ひらめき
やすいと思います。

(4) $\triangle PQR = \triangle ABC$ を求める。

$\triangle PQR$ の周りの三角形の
面積比を求めて、
全体の $\triangle ABC$ から引く
流れで求める。



①

(1) より

$$\triangle APQ = \frac{1}{6} \triangle ABC$$

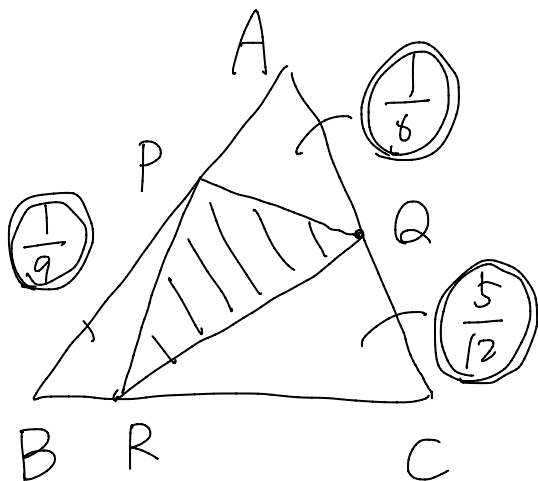
②

$$\begin{aligned} \triangle BPR &= \frac{\boxed{1}}{\boxed{6}} \triangle ABC \times \frac{\textcircled{2}}{\textcircled{3}} \\ &= \frac{1}{9} \triangle ABC \end{aligned}$$

③

$$\triangle RCQ = \frac{\triangle 1}{\triangle 2} \triangle ABC \times \frac{\triangle 5}{\triangle 6} = \frac{5}{12} \triangle ABC$$

図にまとめると



それぞれ $\triangle ABC$ の $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$
11302

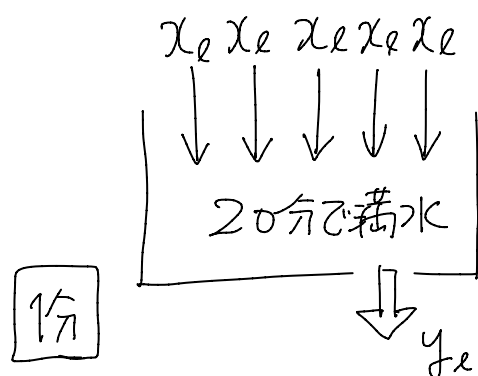
$$\begin{aligned} &1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \right) \\ &= \frac{36}{36} - \left(\frac{4+6+15}{36} \right) \\ &= \frac{11}{36} \end{aligned}$$

5.

給水管10本、排水管1本がついた水槽がある。排水管を開けた状態で、空の水槽に水を入れる。
5本の給水管から同時に水を入れると20分で満水になった。また、8本の給水管から同時に水を入れると11分で満水になった。給水管1本から入る水の量を1分につき x リットル、排水管から抜ける水の量を1分につき y リットルとすると、次の各問いに答えよ。

- (1) 下線部の条件を利用して、水槽の容積を x と y で表せ。
- (2) y を x で表せ。
- (3) 10本の給水管から同時に水を入れると、何分で満水になるか。

(1)



• 入る水の量は 1本で $20x$ であるので $20x \times 5 = 100x$

• 出る水の量は 1分で y であるので $20y$

$$\text{よって } \underline{100x - 20y \text{ (c)}} //$$

(2) 8本の給水管だと11分で満水 であるので (1)と同様に求めると、 $11x \times 8 - 11 \times y$

$$88x - 11y \text{ (c)}$$

(1), (2) どちらの場合も 満水の量は

変わらないので 等式で結ぶことができる。

$$100x - 20y = 88x - 11y$$

$$12x = 9y$$

$$y = \frac{4}{3}x$$

————— //

(3) 10本の給水管だと何分で満水になるか。

- 満水の水の量は $100x - 20y = 100x - 20 \times \frac{4}{3}x$
 $= \frac{220}{3}x_{(e)} \dots \textcircled{1}$

- 10本の給水管で 1分にたまる水の量は
 $x \times 10 - y = 10x - \frac{4}{3}x = \frac{26}{3}x_{(e)} \dots \textcircled{2}$

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \div \textcircled{2} &= \frac{220}{3}x \div \frac{26}{3}x \\ &= \frac{220\cancel{x}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{26\cancel{x}} \\ &= \frac{220}{26} = \frac{110}{13} \text{ 分} \\ &\quad \underline{\hspace{1cm}} \parallel\end{aligned}$$