

滝高等学校 (H27 数学)

(100点満点 60分)

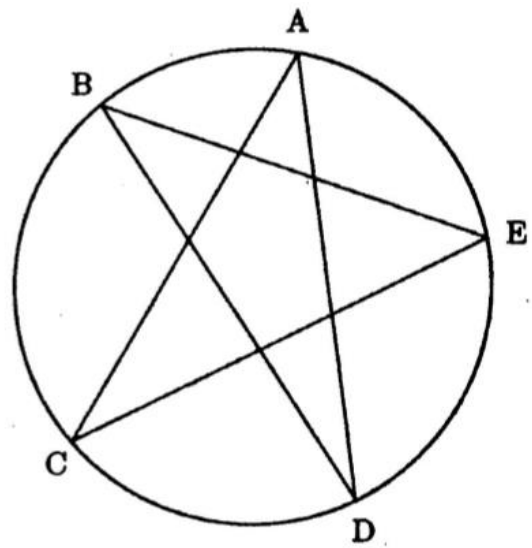
1. 次の問いに答えなさい。

(1) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(2\sqrt{2} - \sqrt{5}) + \frac{\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ を計算せよ。

(2) $(x+y)^2+2x+2y-3$ を因数分解せよ。

(3) $\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$ を解け。

- (4) 右図は, $\angle CAD = 42^\circ$, $AC = AD$, $\widehat{CD} = \widehat{DE}$ である。
 $\angle ACE$ の大きさを求めよ。



- (5) 正六角形 ABCDEF の頂点から 3 点を選んで三角形を作る。直角三角形は何個できるか。

- (6) $(a+b)(a-b)=33$ となる自然数の組 (a, b) をすべて求めよ。

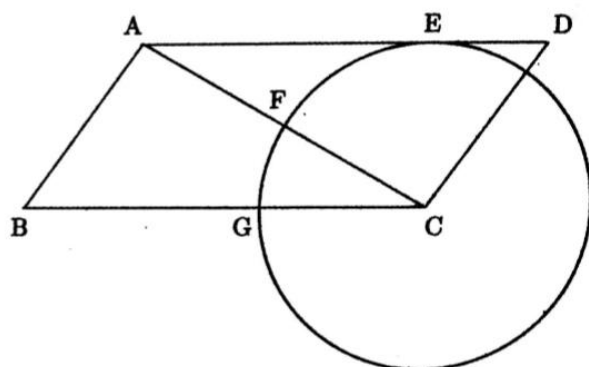
2.

赤玉と白玉が3つの箱 A, B, Cに入っている。赤玉と白玉の個数の比は、箱 A が3:4, 箱 B が3:5, 箱 C が3:2である。次の各問いに答えよ。

- (1) 箱 A から赤玉を4個取り出したところ、箱 A の赤玉と白玉の個数の比は1:2になった。
はじめに箱 A に入っていた赤玉の個数を求めよ。
- (2) 箱 B の赤玉6個を箱 C へ、箱 C の白玉10個を箱 B へ入れたところ、箱 B と箱 C に入っている赤玉の個数の比は7:5に、白玉の個数の比は15:1になった。はじめに箱 B に入っていた赤玉の個数を求めよ。

3.

右図のように、平行四辺形 $ABCD$ の辺 AD と点 C を中心とした円が接する点を E とする。円と線分 AC 、線分 BC との交点をそれぞれ F 、 G とする。 $AB=4$ 、 $AD=8$ 、 $\angle ABC=60^\circ$ であるとき、次の各問いに答えよ。

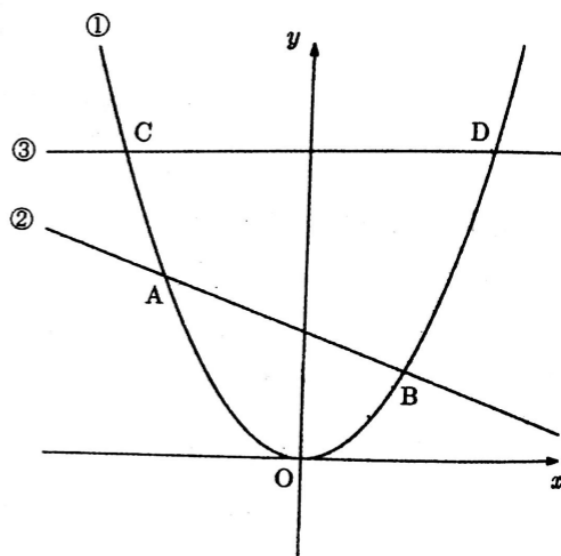


- (1) 円の半径を求めよ。
- (2) $\angle FGC$ の大きさを求めよ。
- (3) $\triangle CFG$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の何倍であるか。
- (4) 線分 DC を C の方に延長した先の、円との交点を H とする。 $\triangle DEH$ の面積を求めよ。

4.

右図のように、放物線 $y = \frac{1}{4}x^2 \cdots \textcircled{1}$ と 2 直線 $y = -\frac{1}{2}x + 6 \cdots \textcircled{2}$, $y = k \cdots \textcircled{3}$ があり、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の交点を A, B とし、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{3}$ の交点を C, D とする。CD = 16 であるとき、次の各問いに答えよ。

- (1) k の値を求めよ。
- (2) 2 点 A, B の座標をそれぞれ求めよ。
- (3) y 軸上に点 P を、BP + PD の長さが最小になるようにとる。点 P の座標を求めよ。
- (4) 直線 CD 上に点 Q を、四角形 ABDC と $\triangle BDQ$ の面積が等しくなるようにとる。点 Q の x 座標が負であるとき、点 Q の座標を求めよ。



5.

$AB=BC=CD=DA=3$, $AC=2$, $BD=2\sqrt{2}$ である四面体 $ABCD$ がある。

- (1) 辺 AC の中点を M とするとき, $\triangle BMD$ の面積を求めよ。
- (2) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。
- (3) 点 A から $\triangle BCD$ に下ろした垂線の長さを求めよ。

滝高等学校 (H27 数学)

(100点満点 60分)

1. 次の問いに答えなさい。

(1) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(2\sqrt{2} - \sqrt{5}) + \frac{\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ を計算せよ。

分配法則

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

↓

$$= \frac{2\sqrt{10} - 5 + 4 - \sqrt{10}}{1} + \frac{(\sqrt{5} + 5\sqrt{2}) \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{10} - 1 + \frac{5 + 5\sqrt{10}}{5}$$

$$= \sqrt{10} - 1 + 1 + \sqrt{10} = \underline{\underline{2\sqrt{10}}}$$

分母の有理化

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sqrt{a}} &= \frac{b \times \sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} \\ &= \frac{b\sqrt{a}}{a} \end{aligned}$$

(2) $(x+y)^2 + 2x + 2y - 3$ を因数分解せよ。

$$= (x+y)^2 + 2(x+y) - 3$$

$$x+y = M \text{ とおくと}$$

$$M^2 + 2M - 3$$

$$= (M+3)(M-1)$$

$$M = x+y \text{ を戻すと}$$

$$= (x+y+3)(x+y-1)$$

最初=展開すると,

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 3$$

となり、手がつけづらくなります。

Point

同じ項が作れそう
な式' がある
という予想をしながら
式を見つめ

$$2x + 2y$$

$$= 2(x+y)$$

となり $(x+y)$ が

1つの式に2度出て
くるので有効だと
わかる。

(3) $\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$ を解け。

両辺 $\times 8$

$$8\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - 1\right) = 0 \times 8$$

$$x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$+7+2 = -8$$

$$+2+2 = -4$$

の2つの整数はない

整数で因数分解ができないので解の公式を用いて

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ と比較すると}$$

$$a = 1, \quad b = -4, \quad c = -8$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{に代入}$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 32}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

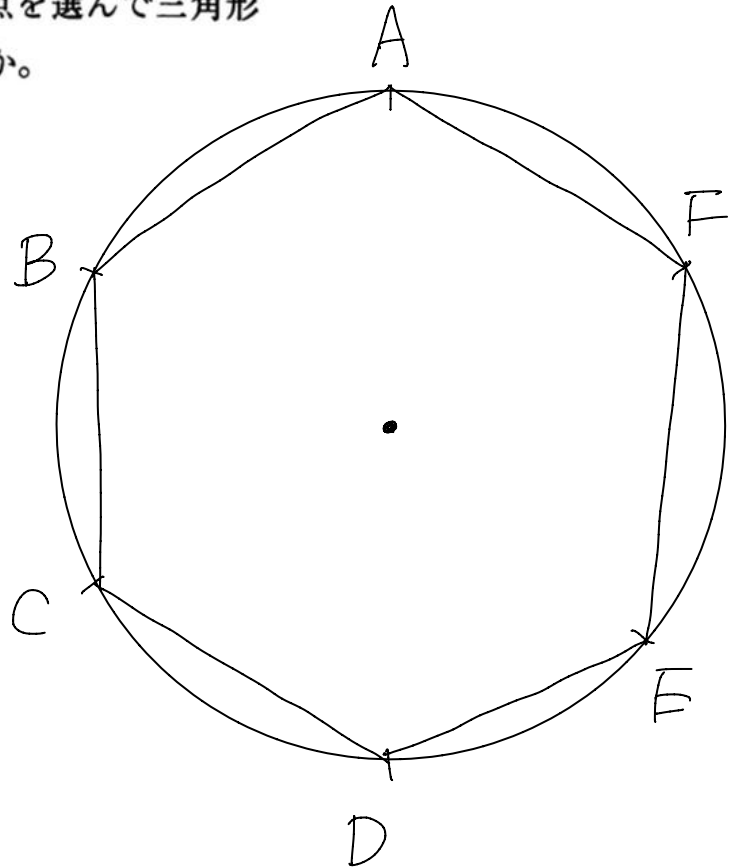
$$= \frac{4 \pm 4\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{2 \pm 2\sqrt{3}}}$$

- (5) 正六角形 ABCDEF の頂点から 3 点を選んで三角形を作る。直角三角形は何個できるか。

(I) A, D の 2 点を
通る場合

もう 1 点は

B, C, E, F の
4 点があるのてい
4 個



(II) C, F の場合

A, B, D, E で 4 個

(III) B, E の場合

A, F, D, C で 4 個

$$4 \times 3 = 12 \text{ 個}$$

//

直角三角形になる
頂点の 2 点は必ず
向かいあう 2 点がい
選ばれろのてい
(I) ~ (III) の 3 つの
場合を考える。

(6) $(a+b)(a-b)=33$ となる自然数の組 (a, b) をすべて求めよ。

(I) $a+b=11$, $a-b=3$

$$\begin{array}{r} +) \begin{cases} a+b=11 \\ a-b=3 \end{cases} \\ \hline 2a = 14 \\ a = 7 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{代} \\ \lambda \end{array} \right\}$$

$$7+b=11$$

$$b=4$$

$$(a, b) = (7, 4)$$

————— //

(II) $a+b=3$, $a-b=11$

$$\begin{array}{r} +) \begin{cases} a+b=3 \\ a-b=11 \end{cases} \\ \hline 2a = 14 \\ a = 7 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{代} \\ \lambda \end{array} \right\}$$

$$7+b=3$$

$$b=-4$$

$$(a, b) = (7, -4)$$

b は負の数なので

自然数ではないため

不適。

(III) $a+b=-11$

$$a-b=-3$$

$$\begin{array}{r} +) \begin{cases} a+b=-11 \\ a-b=-3 \end{cases} \\ \hline 2a = -14 \\ a = -7 \end{array}$$

$$2a = -14$$

$$a = -7$$

この時点で不適

(IV) $a+b=33$

$$a-b=1$$

$$\begin{array}{r} +) \begin{cases} a+b=33 \\ a-b=1 \end{cases} \\ \hline 2a = 34 \\ a = 17 \end{array}$$

$$2a = 34$$

$$a = 17$$

$$17+b=33$$

$$b=16$$

$$(a, b) = (17, 16)$$

よって

$$(a, b) = (17, 16)$$

$$= (7, 4)$$

————— //

2.

赤玉と白玉が3つの箱 A, B, Cに入っている。赤玉と白玉の個数の比は、箱 A が3:4, 箱 B が3:5, 箱 C が3:2である。次の各問いに答えよ。

- (1) 箱 A から赤玉を4個取り出したところ、箱 A の赤玉と白玉の個数の比は1:2になった。
はじめに箱 A に入っていた赤玉の個数を求めよ。
- (2) 箱 B の赤玉6個を箱 Cへ、箱 C の白玉10個を箱 Bへ入れたところ、箱 B と箱 Cに入っている赤玉の個数の比は7:5に、白玉の個数の比は15:1になった。はじめに箱 Bに入っていた赤玉の個数を求めよ。

(1) はじめに箱 Aに入っていた赤玉の個数を x 個とすると、

3 : 4

赤 : 白
 x : $\uparrow$

A

この白の数は

$$3:4 = x:白$$

$$3白 = 4x$$

$$白 = \frac{4}{3}x$$

→

白の数は
変化する。

1 : 2

赤 : 白
 $x-4$: $\uparrow$

よ?

$$(x-4) : \frac{4}{3}x = 1:2$$

$$\frac{4}{3}x = 2(x-4)$$

$$4x = 6(x-4)$$

$$24 = 2x \quad x = 12$$

12個 //

(2)

3 : 5

赤 : 白
 x : $\uparrow$

B $\frac{5}{3}x$

赤6
←
白10

3 : 2

赤 : 白
 y : $\uparrow$

C $\frac{2}{3}y$

交換後

7 : 15

赤 : 白
 $x-6$: $\uparrow$

$\frac{5}{3}x+10$

5 : 1

赤 : 白
 $y+6$: $\uparrow$

$\frac{2}{3}y-10$

① 赤 $(x-6) : (y+6) = 7:5$

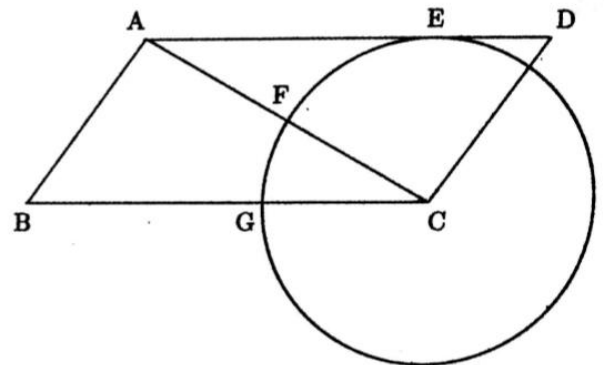
② 白 $(\frac{5}{3}x+10) : (\frac{2}{3}y-10) = 15:1$

上の2つの式を連立して
解くと $(x, y) = (48, 24)$

48個 //

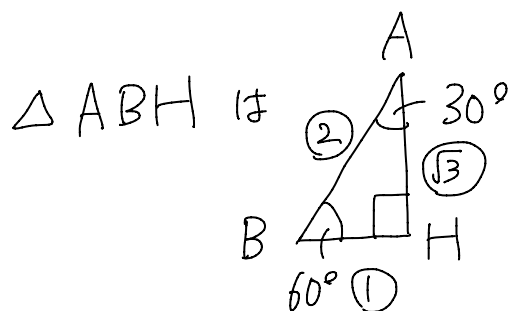
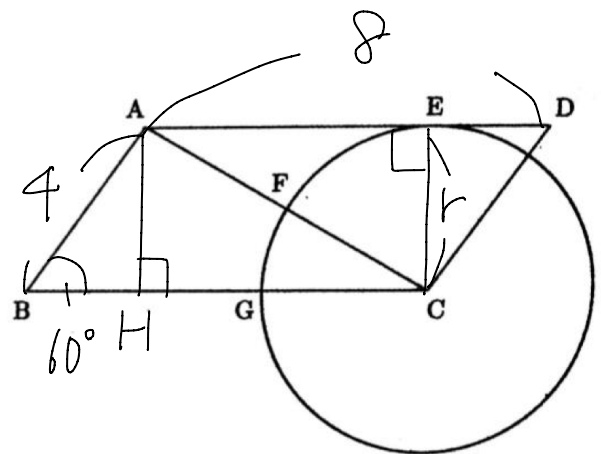
3.

右図のように、平行四辺形 ABCD の辺 AD と点 C を中心とした円が接する点を E とする。円と線分 AC、線分 BC との交点をそれぞれ F、G とする。AB=4, AD=8, $\angle ABC=60^\circ$ であるとき、次の各問いに答えよ。



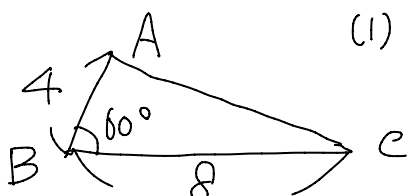
- (1) 円の半径を求めよ。
- (2) $\angle FGC$ の大きさを求めよ。
- (3) $\triangle CFG$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の何倍であるか。
- (4) 線分 DC を C の方に延長した先の、円との交点を H とする。 $\triangle DEH$ の面積を求めよ。

(1) 右図のように A から BC 上に垂線を引き、その交点を H とすると、 $\square ABCD$ は平行四辺形なので $AH = EC = r$ (半径) となる。



$1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形なので $AB=4$ より
 $(2) = (\sqrt{3}) = 4 = r$
 $2r = 4\sqrt{3}$
 $r = 2\sqrt{3}$

(2) $\triangle ABC$ から $\angle ACB$ を求める。



(1) と $BC=8$ より
 $\angle BAC = 90^\circ$
 $\angle ACB = 30^\circ$

$\triangle FCG$ は $FC = CG$ の二等辺三角形より
 $\angle FGC = \angle GFC$
 $= (180 - 30) \div 2 = 75^\circ$

(3) $\triangle CFG$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の何倍であるか。

(2) より $\triangle ABC$ は $60^\circ, 30^\circ$

90° の 直角三角形より

$$AC = 4\sqrt{3}$$

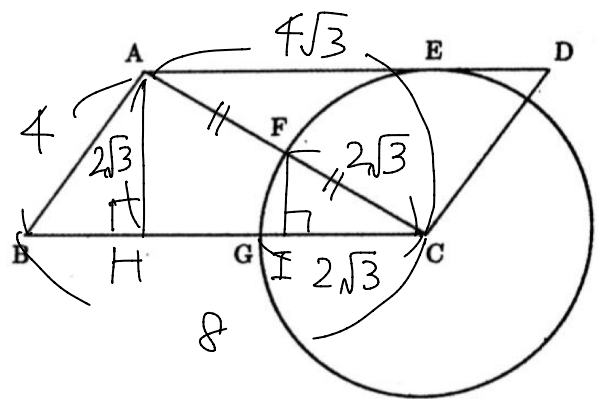
(1) より, $FC = 2\sqrt{3}$ となる。

$$AF = FC = 2\sqrt{3} \text{ となる。}$$

よって中点連結定理より

$$FI = \frac{1}{2} AH = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC &= BC \times AH \times \frac{1}{2} \\ &= 8 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \\ &= 8\sqrt{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \triangle CFG &= GC \times FI \times \frac{1}{2} \\ &= 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

分かりづらい時は
具体例で解決。
4は2の何倍かだと
 $\frac{4}{2}$ をおぼえて
 $\frac{3}{8\sqrt{3}}$

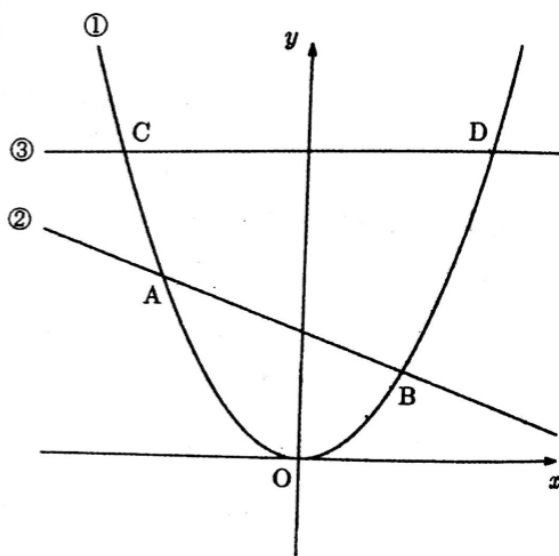
$\triangle CFG$ は $\triangle ABC$ の何倍か。
(3) (8\sqrt{3})

$$3 \div 8\sqrt{3} = \frac{3}{8\sqrt{3}} = \frac{3 \times \sqrt{3}}{8\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{8 \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{8} \text{ 倍}$$

//

右図のように、放物線 $y = \frac{1}{4}x^2 \cdots ①$ と 2 直線 $y = -\frac{1}{2}x + 6 \cdots ②$, $y = k \cdots ③$ があり、①と②の交点を A, B とし、①と③の交点を C, D とする。CD=16 であるとき、次の各問いに答えよ。

- (1) k の値を求めよ。
- (2) 2 点 A, B の座標をそれぞれ求めよ。
- (3) y 軸上に点 P を、BP+PD の長さが最小になるようにとる。点 P の座標を求めよ。
- (4) 直線 CD 上に点 Q を、四角形 ABDC と $\triangle BDQ$ の面積が等しくなるようにとる。点 Q の x 座標が負であるとき、点 Q の座標を求めよ。



(1) 原点を通る放物線は
 y 軸対称なので
 C と D の x 座標の
 絶対値は等しく、符号
 は反対になる。
 $C(-8, \quad) D(8, \quad)$

x 座標が決まったので

$y = \frac{1}{4}x^2$ に代入すると、

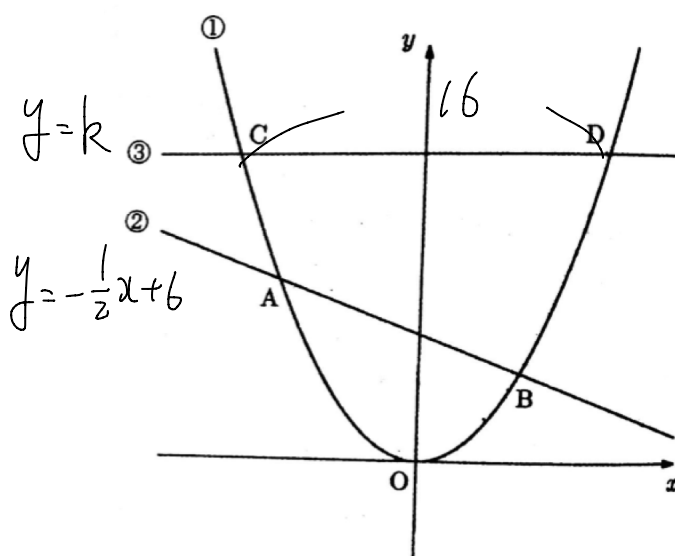
$$y = \frac{1}{4} \times (-8)^2 = 16$$

$$y = \frac{1}{4} \times 8^2 = 16$$

よって

$$C(-8, 16) D(8, 16)$$

$$y = \frac{1}{4}x^2$$



とわかるので

③は $y = 16$ の直線
 とわかる

よって

$$k = 16$$

〃

(2) 2点 A, B の座標をそれぞれ求めよ。

A, B は ①, ② の交点

なので 連立方程式に

して解くことで求められる。

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 & \dots ① \\ y = -\frac{1}{2}x + 6 & \dots ② \end{cases}$$

① を ② に代入

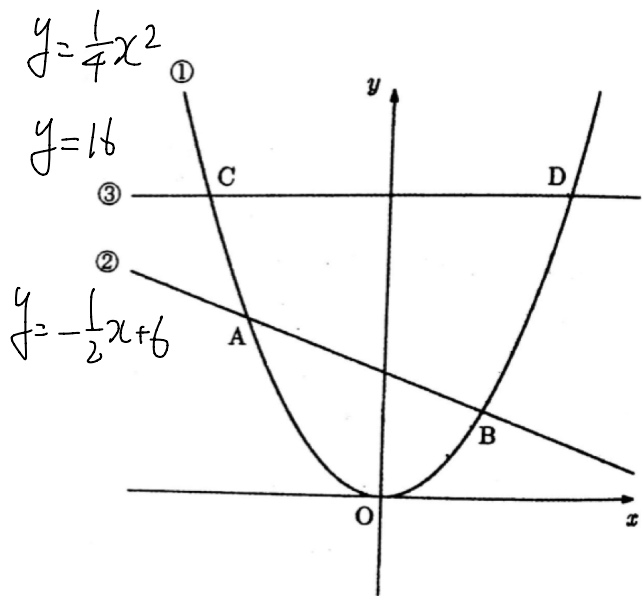
$$\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + 6 \quad \downarrow \times 4$$

$$x^2 = -2x + 24$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x+6)(x-4) = 0$$

$$x = -6, 4$$



$$A(-6, \quad)$$

$$B(4, \quad)$$

とわかるので

$$x = -6, x = 4 \text{ を}$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 \text{ に代入すると}$$

y の値が求まる。

$$y = \frac{1}{4} \times (-6)^2 = 9$$

$$y = \frac{1}{4} \times 4^2 = 4$$

よって $A(-6, 9) \quad B(4, 4)$

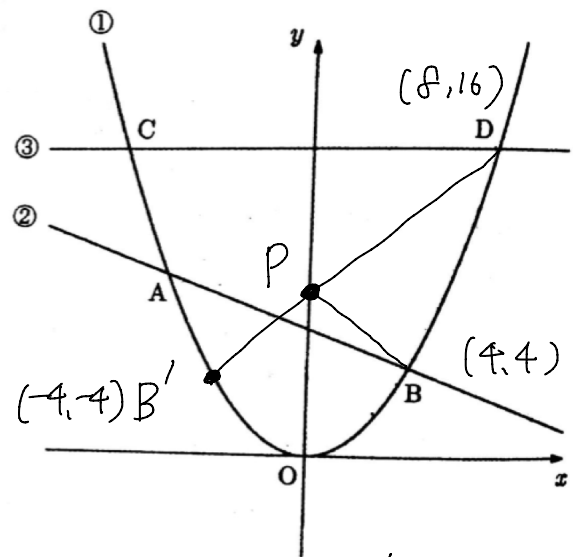
- (3) y 軸上に点 P を, $BP+PD$ の長さが最小になるようにとる。点 P の座標を求めよ。

B の y 軸対称の点を B'
とすると, $B'(-4, 4)$
である。

$$BP+PD \text{ の長さが最小} \\ = BP+PB'$$

したがって とうなる点 P の
座標を求むる。

$B'(-4, -4)$ $D(8, 16)$
を通る直線の y 軸との
交点 (切片) が答えであ
る。



傾きを
求める

$$\frac{16-4}{8-(-4)}$$

$$\text{傾き} = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$$

$$= \frac{16-4}{8-(-4)} = \frac{12}{12} = 1$$

$$y = x + b$$

$(8, 16)$ を通るので

$$16 = 8 + b \quad b = 8$$

$$\text{よって } P(0, 8)$$

- (4) 直線CD上に点Qを、四角形ABDCと△BDQの面積が等しくなるようにとる。点Qのx座標が負であるとき、点Qの座標を求めよ。

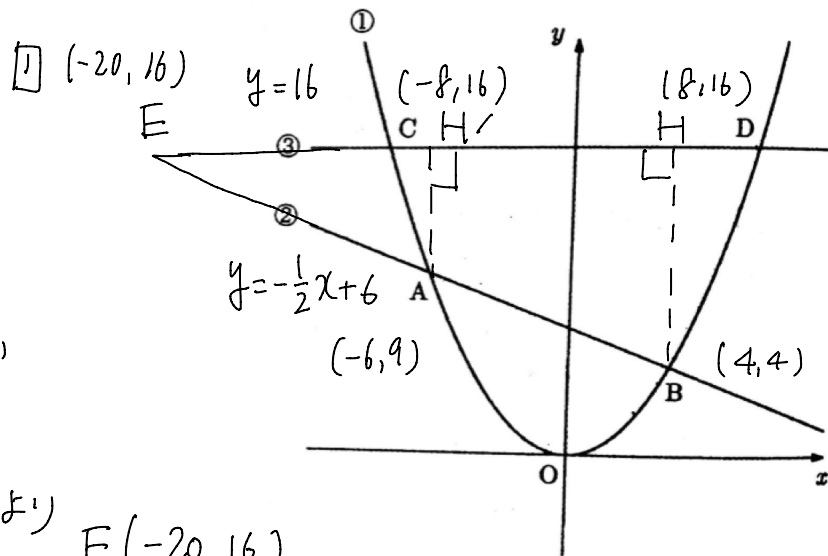
①

CDとABを

それぞれ延長した

交点をEとすると、

$$\begin{cases} y=16 \\ y=-\frac{1}{2}x+6 \end{cases} \text{より } E(-20, 16)$$



② □ABDCの面積を求めよ。

$$\square ABDC = \triangle EDB - \triangle ECA$$

$$= ED \times BH \times \frac{1}{2} - EC \times AH' \times \frac{1}{2}$$

$$= 28 \times 12 \times \frac{1}{2} - 12 \times 7 \times \frac{1}{2}$$

$$= 168 - 42 = 126$$

③ △BDQ = 126 となるQを求めよ。

QはCD上の点なので

Q(x, 16) と表せる。

$$\begin{aligned} \triangle BDQ &= DQ \times BH \times \frac{1}{2} \\ &= (8+x) \times 12 \times \frac{1}{2} = 126 \end{aligned}$$

$$8+x = 21$$

$$x = 13$$

よって

$$Q(-13, 16)$$

~~~~~



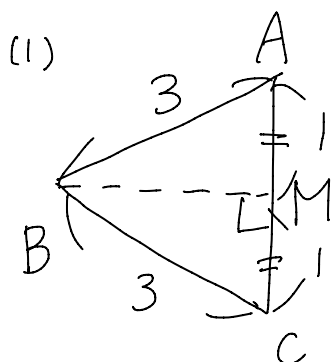
5.

$AB=BC=CD=DA=3$ ,  $AC=2$ ,  $BD=2\sqrt{2}$ である四面体  $ABCD$  がある。

(1) 辺  $AC$  の中点を  $M$  とするとき,  $\triangle BMD$  の面積を求めよ。

(2) 四面体  $ABCD$  の体積を求めよ。

(3) 点  $A$  から  $\triangle BCD$  に下ろした垂線の長さを求めよ。



よて 平方の定理

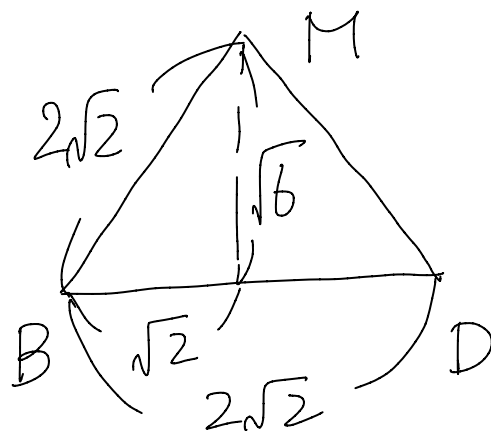
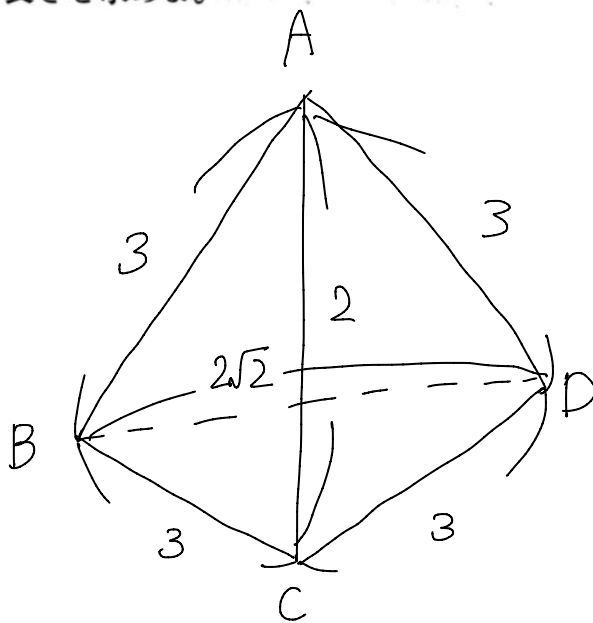
より

$$\begin{aligned} BM &= \sqrt{AB^2 - AM^2} \\ &= \sqrt{9 - 1} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

同様に  $DM$  も  $2\sqrt{2}$

つまり

$\triangle BMD$  は 1 辺が  $2\sqrt{2}$  の正三角形だと  
いうことがわかる。



よて

$\triangle BMD$  は 1 辺  $2\sqrt{2}$   
高さ  $\sqrt{6}$  ( $1:2:\sqrt{3}$ )

$$\begin{aligned} \text{つまり } & 2\sqrt{2} \times \sqrt{6} \times \frac{1}{2} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

(2) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

$AC \perp BM$  より

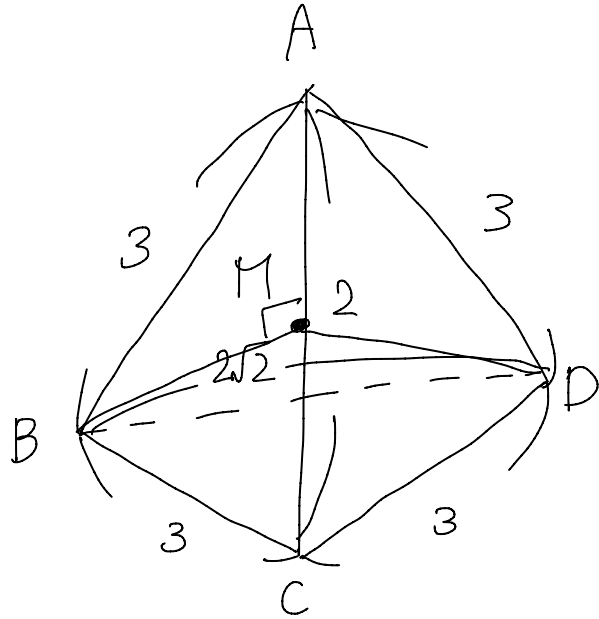
$AM \perp \triangle BMD$

$CM \perp \triangle BMD$

+\text{I} ので、

四面体 ABCD を

次のように計算できる。



四面体 ABCD

= 四面体 AMBD + 四面体 CMBD

$$= \triangle BMD \times AM \times \frac{1}{3} + \triangle BMD \times CM \times \frac{1}{3}$$

$$= \triangle BMD \times \frac{1}{3} \underbrace{(AM + CM)}_{= AC} \quad \leftarrow \text{共通因数}$$

$$= 2\sqrt{3} \times \frac{1}{3} \times 2$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

           //

$\triangle BMD$

と

$\frac{1}{3}$  を ( ) の

外に出した。

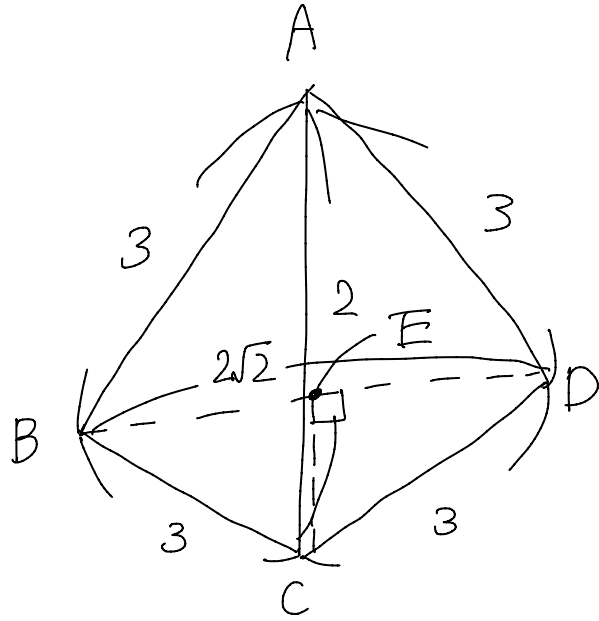
(3) 点 A から  $\triangle BCD$  に下ろした垂線の長さを求めよ。

求める垂線の長さを  
 $h$  とすると、

四面体  $ABCD$

$$= \triangle BCD \times h \times \frac{1}{3}$$

で計算できる。



$$\begin{aligned} \triangle BCD &= BD \times CE \times \frac{1}{2} \\ &= 2\sqrt{2} \times \sqrt{7} \times \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

よって

$$\triangle BCD \times h \times \frac{1}{3} = \text{四面体 } ABCD$$

より

$$\sqrt{14} \times h \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$h = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{42}}{14} = \frac{2\sqrt{42}}{7}$$

