

(滝)

)高等学校

H(25)数学

(100点満点 (60)分)

1. 次の問いに答えなさい。

(1) $\frac{(5+2\sqrt{6})^2 - (5-2\sqrt{6})^2}{5\sqrt{3}}$ を計算せよ。

(2) $x\%$ の食塩水 yg に $3yg$ の水を加えたときの濃度($\%$)を表す式を求めよ。

(3) $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 29 \times 30$ を素因数分解すると $2^a \times 3^b \times 5^c \times \cdots \times 29^j$ の形になる。 a と b の値をそれぞれ求めよ。

2.

放物線 $y = ax^2$ 上に3点 $A(-1, p)$, $B(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $C(q, 4)$ (ただし, $q > 0$)がある。

この放物線上に点 D を $AC \parallel BD$ となるようにとる。次の各問いに答えよ。

- (1) a, p, q の値をそれぞれ求めよ。
- (2) 直線 AC の式を求めよ。
- (3) 点 D の座標を求めよ。
- (4) 台形 $ABDC$ の面積を求めよ。

3.

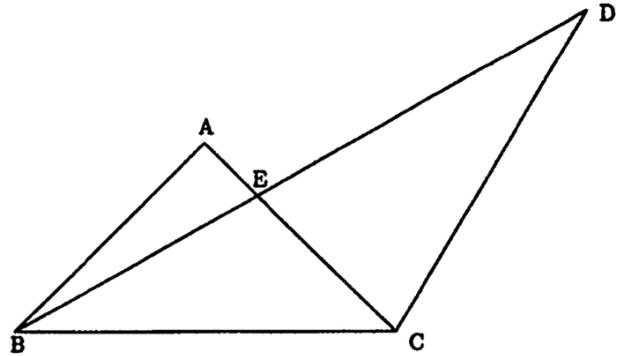
3点 $A(3, 7)$, $B(8, 4)$, $C(6, 9)$ を頂点とする $\triangle ABC$ がある。また、2つのサイコロ P, Q を投げたときの出た目をそれぞれ p, q として、直線 $l : y = \frac{q}{p}x$ を考える。次の各問いに答えよ。

- (1) 直線 l が点 B を通る確率を求めよ。
- (2) 直線 l が辺 BC (両端を含む) と交わる確率を求めよ。
- (3) 直線 l が $\triangle ABC$ の周および内部と交わらない確率を求めよ。

4.

右の図において、 $\angle A = 90^\circ$ 、 $AB = AC$ 、 $\angle BCD = 120^\circ$ 、 $CB = CD = 2$ である。また、点EはACとBDの交点である。次の各問いに答えよ。

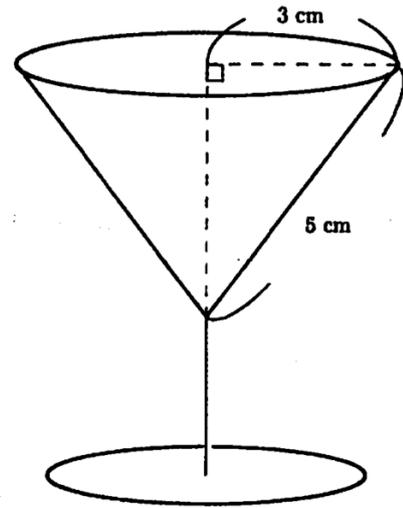
- (1) $\angle DEC$ の大きさを求めよ。
- (2) BEの長さを求めよ。
- (3) $\triangle BCE$ の面積を求めよ。
- (4) $\triangle ABE$ の面積は $\triangle CDE$ の面積の何倍か。



5.

右の図のような円錐形のグラスがある。赤い球をグラスに入れた場合、真横から見るとちょうど半分だけ球が隠れる。また、白い球をグラスに入れた場合、真横から見るとちょうど全部球が隠れる。次の各問いに答えよ。

- (1) 赤い球の半径を求めよ。
- (2) 白い球の半径を求めよ。
- (3) 白い球とグラスが接している部分の長さを求めよ。



6.

あるスーパーでは、500円未満の買い物には値引きがなく、500円以上2000円未満の買い物には5%、2000円以上の買い物には10%の値引きがある。次の各問いに答えよ。

- (1) 定価400円と定価1200円の商品を別々に買ったときと、まとめて買ったときの差額はいくらか。
(2) ある人がこのスーパーで次のように4日連続で買い物をした。

1日目	商品XとYを別々に買ったところ、Yのみ値引きがあった。
2日目	商品XとYをまとめて買ったところ、1日目よりも125円安く買った。
3日目	商品X、Y、Zを別々に買ったところ、Zについては5%の値引きがあった。
4日目	商品X、Y、Zをまとめて買ったところ、3日目よりも180円安く買った。

商品X、Y、Zの定価をそれぞれ、 x 円、 y 円、 z 円とすると、

- (i) x と y の関係式を求めよ。
(ii) z の値を求めよ。

(100点満点 (60)分)

1. 次の問いに答えなさい。

(1) $\frac{(5+2\sqrt{6})^2 - (5-2\sqrt{6})^2}{5\sqrt{3}}$ を計算せよ。

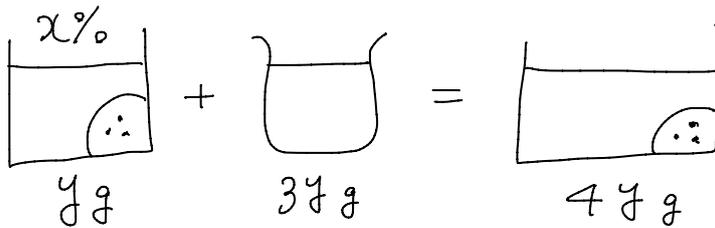
$$\frac{A^2 - B^2}{5\sqrt{3}} = \frac{(A+B)(A-B)}{5\sqrt{3}}$$

$$= \frac{10 \times 4\sqrt{6}}{5\sqrt{3}} = 8\sqrt{2}$$

$$A = 5 + 2\sqrt{6}, B = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$A + B = 10, A - B = 4\sqrt{6}$$

(2) $x\%$ の食塩水 y g に $3y$ g の水を加えたときの濃度(%)を表す式を求めよ。



4yg 中食塩が
 $\frac{x}{100}$ の割合

食塩 $y \times \frac{x}{100} + 0 = \frac{x}{100} y$

$\frac{x}{100} \div 4y \times 100$ で濃度
 が求まる。
 $\frac{x}{4} \%$

(3) $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 29 \times 30$ を素因数分解すると $2^a \times 3^b \times 5^c \times \dots \times 29^j$ の形になる。aとbの値をそれぞれ求めよ。

$$4 = 2^2, 6 = 2 \times 3, 8 = 2^3, 9 = 3^2, 10 = 2 \times 5$$

$$12 = 2^2 \times 3, 14 = 2 \times 7, 15 = 3 \times 5, 16 = 2^4, 18 = 2 \times 3^2$$

$$20 = 2^2 \times 5, 21 = 3 \times 7, 22 = 2 \times 11, 24 = 2^3 \times 3$$

$$25 = 5^2, 26 = 2 \times 13, 27 = 3^3, 28 = 2^2 \times 7, 30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$a = 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 2 + 1 + 4 + 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 2 + 1 = 26$$

$$b = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 3 + 1 = 14$$

2.

放物線 $y = ax^2$ 上に3点 $A(-1, p)$, $B(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $C(q, 4)$ (ただし, $q > 0$) がある。

この放物線上に点 D を $AC \parallel BD$ となるようにとる。次の各問いに答えよ。

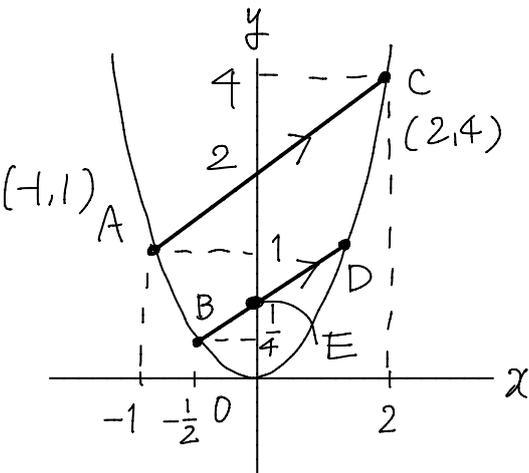
- (1) a, p, q の値をそれぞれ求めよ。
- (2) 直線 AC の式を求めよ。
- (3) 点 D の座標を求めよ。
- (4) 台形 $ABDC$ の面積を求めよ。

(1) $B(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ を通る $y = ax^2$ に代入すると
 $\frac{1}{4} = a \times (-\frac{1}{2})^2$ $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}a$ $a = 1$ #

$A(-1, p)$, $C(q, 4)$ を
 $y = x^2$ に代入すると
 $p = (-1)^2$, $p = 1$ # $4 = q^2$ $q = 2$ #

(2) $A(-1, 1)$ $C(2, 4)$
 傾き = $\frac{4-1}{2-(-1)} = \frac{3}{3} = 1$

$y = x + b$ に $(2, 4)$ を代入すると
 $4 = 2 + b$, $b = 2$ $y = x + 2$ #



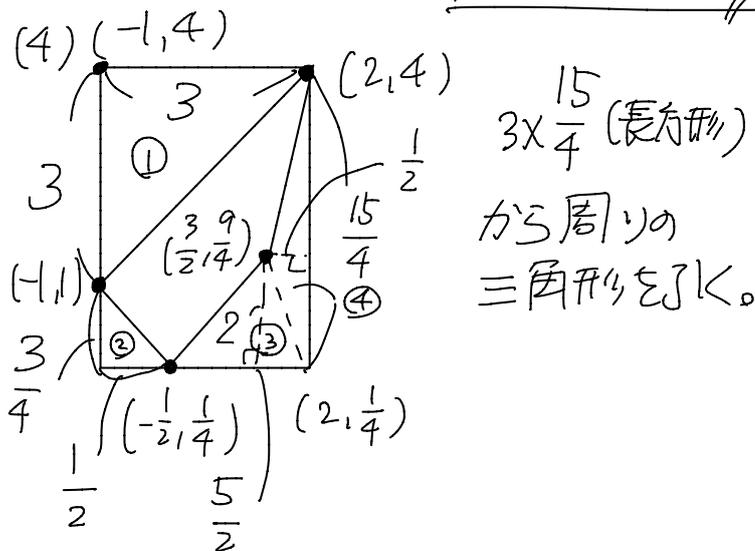
(3) AC の傾きは $y = x + 2$
 から 1, $b = 2$
 $y = x + b$ に $B(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

を通る $y = x + b$ に代入すると
 $\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} + b$, $b = \frac{3}{4}$

$y = x + \frac{3}{4}$
 これと $y = x^2$ の交点
 を求める

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + \frac{3}{4} \end{cases}$ に代入
 $x^2 = x + \frac{3}{4}$
 $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$

$(x + \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2}) = 0$, $D(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ #



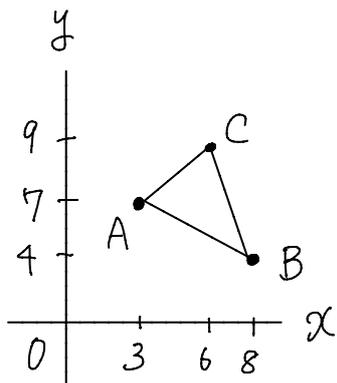
$3 \times \frac{15}{4}$ (長方形)
 から周りの
 三角形を引く。

$3 \times \frac{15}{4} - \left(\underset{\textcircled{1}}{3 \times 3 \times \frac{1}{2}} + \underset{\textcircled{2}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}} + \underset{\textcircled{3}}{\frac{5}{2} \times 2 \times \frac{1}{2}} + \underset{\textcircled{4}}{\frac{15}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} \right) = \frac{25}{8}$ #

3.

3点A(3, 7), B(8, 4), C(6, 9)を頂点とする△ABCがある。また、2つのサイコロP, Qを投げたときの出た目をそれぞれp, qとして、直線ℓ: $y = \frac{q}{p}x$ を考える。次の各問いに答えよ。

- (1) 直線ℓが点Bを通る確率を求めよ。
- (2) 直線ℓが辺BC(両端を含む)と交わる確率を求めよ。
- (3) 直線ℓが△ABCの周および内部と交わらない確率を求めよ。



(1) 直線ℓ: $y = \frac{q}{p}x$ は原点を通る直線

B(8, 4)を通るといふことは値が $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{q}{p}$ を約分して $\frac{1}{2}$ になる (p, q) の組み合わせは、

$$(p, q) = (1, 2), (2, 4), (3, 6) \quad \frac{3}{36} = \frac{1}{12} //$$

(2) Cを通ると $y = \frac{q}{p}x = \frac{3}{2}x$

つまり $\frac{1}{2} \leq \frac{q}{p} \leq \frac{3}{2}$ を満たせばよい。

p \ q	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{6}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{4}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$

$$\frac{20}{36} = \frac{5}{9} //$$

(3) OAの傾き $\frac{7}{3}$ より大きく

OBの傾き $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ より小さい
 $\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}$ の6通り

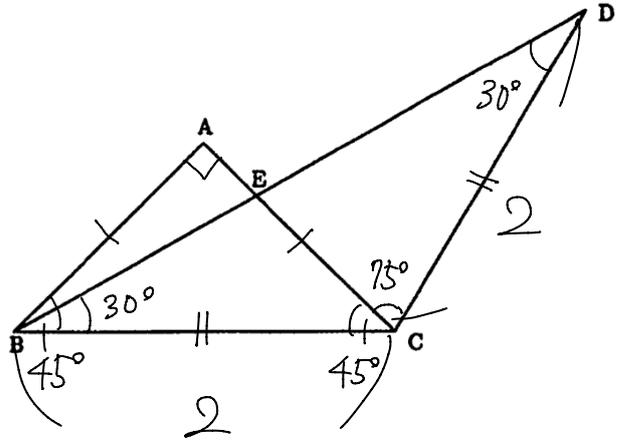
$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{2}{5}, \frac{2}{8}$ の6通り

$$\frac{6+6}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} //$$

4.

右の図において、 $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, $\angle BCD = 120^\circ$, $CB = CD = 2$ である。また、点EはACとBDの交点である。次の各問いに答えよ。

- (1) $\angle DEC$ の大きさを求めよ。
- (2) BEの長さを求めよ。
- (3) $\triangle BCE$ の面積を求めよ。
- (4) $\triangle ABE$ の面積は $\triangle CDE$ の面積の何倍か。



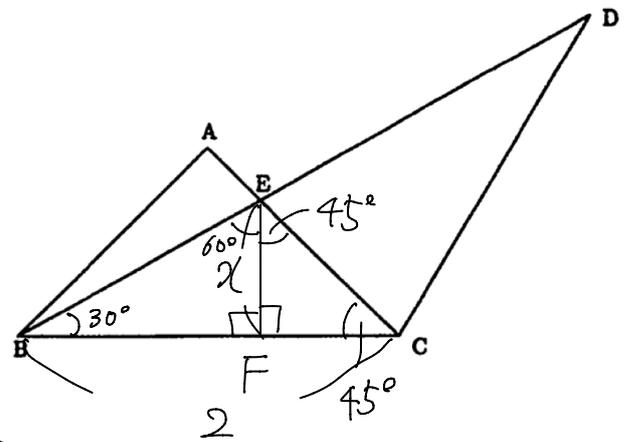
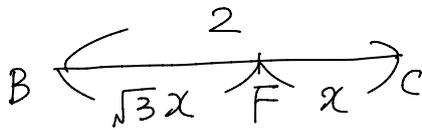
(1) $\triangle BCD$ は頂角が 120° の二等辺三角形なので2つの底角は等しく $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ = \angle EBC = \angle EDC$

$\triangle DEC$ で $180^\circ - (30^\circ + 75^\circ) = 75^\circ$ //

(2) EからBCへの垂線を引き交点をFとし、 $EF = x$ とすると、
 • $\triangle EBF$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形なので

$BE = 2x, BF = \sqrt{3}x$

• $\triangle EFC$ は $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ なので
 $FC = x, EC = \sqrt{2}x$



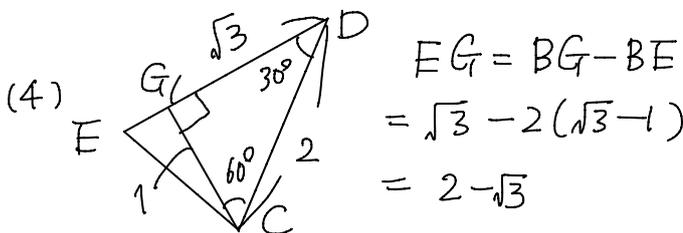
$(\sqrt{3} + 1)x = 2, x = \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$

$x = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1} = \sqrt{3} - 1$ //

Point + 分母の有理化は符号をかえた式を分母・分子に加える //

(3) $\triangle BEC = BC \times EF \times \frac{1}{2}$
 $= 2 \times (\sqrt{3} - 1) \times \frac{1}{2} = \sqrt{3} - 1$ //

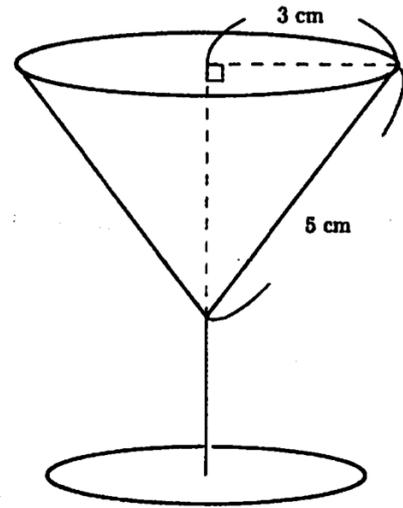
よって $\triangle CDE = (2 - \sqrt{3} + \sqrt{3}) \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$



$\triangle ABE = \triangle ABC - \triangle BCE$
 $= 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3}$
 $2 - \sqrt{3}$ 倍 //

5.

右の図のような円錐形のグラスがある。赤い球をグラスに入れた場合、真横から見るとちょうど半分だけ球が隠れる。また、白い球をグラスに入れた場合、真横から見るとちょうど全部球が隠れる。次の各問いに答えよ。



- (1) 赤い球の半径を求めよ。
- (2) 白い球の半径を求めよ。
- (3) 白い球とグラスが接している部分の長さを求めよ。

(1)

3:4:5の直角三角形
 $DC = CB = HD = DB$
 $3 = 5 - x = 4$ $x = \frac{12}{5} \text{ cm}$

(2)

CD, CI は接線 $\therefore CD = CI$
 同様に $BI = BC - CI = 5 - 3 = 2$
 $DC : DB = IO : IB$
 $3 : 4 = y : 2$ $y = \frac{3}{2} \text{ cm}$

(3)

$BC = BI = DC = JI$
 $5 = 2 + 3 = JI$
 $JI = \frac{6}{5}$

よって半径 $\frac{6}{5} \text{ cm}$ の周の長さは $\frac{6}{5} \times 2 \times \pi = \frac{12}{5} \pi \text{ cm}$

6.

あるスーパーでは、500円未満の買い物には値引きがなく、500円以上2000円未満の買い物には5%、2000円以上の買い物には10%の値引きがある。次の各問いに答えよ。

- (1) 定価400円と定価1200円の商品を別々に買ったときと、まとめて買ったときの差額はいくらか。
 (2) ある人がこのスーパーで次のように4日連続で買い物をした。

1日目	商品XとYを別々に買ったところ、Yのみ値引きがあった。
2日目	商品XとYをまとめて買ったところ、1日目よりも125円安く買った。
3日目	商品X、Y、Zを別々に買ったところ、Zについては5%の値引きがあった。
4日目	商品X、Y、Zをまとめて買ったところ、3日目よりも180円安く買った。

商品X、Y、Zの定価をそれぞれ、 x 円、 y 円、 z 円とすると、

- (i) x と y の関係式を求めよ。
 (ii) z の値を求めよ。

(1) 別々に買った場合 $400 + 1200 \times \frac{95}{100} = 1540$
 まとめて買った場合 $(400 + 1200) \times \frac{95}{100} = 1520$ $\frac{20円}{\#}$

(2) (i) 1日目の情報より $x < y$ ① $x + \frac{95}{100}y$ (円) ② $x + \frac{90}{100}y$ (円)
 2日目の情報より $(x+y) \times \frac{95}{100}$ (円) ③ $(x+y) \times \frac{90}{100}$ (円) ④

① - ② = $\frac{5}{100}x < 25$ ①より \times

① - ④ = $\frac{10}{100}x + \frac{5}{100}y < \frac{10}{100} \times 500 + \frac{5}{100} \times 2000 = 50 + 100 = 150$ ○

② - ③ = $\frac{5}{100}x - \frac{5}{100}y$ $x < y$ より \times

② - ④ = $\frac{10}{100}x < \frac{10}{100} \times 500 = 50$ \times $\frac{10}{100}x + \frac{5}{100}y = 125 \rightarrow 2x + y = 2500$ $\#$

(ii) 3日目 $x + \frac{95}{100}y + \frac{95}{100}z$ - 4日目 $(x+y+z) \times \frac{90}{100} = 180$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 3600 \\ 2x + y = 2500 \end{cases}$$

$$z = 1100$$
 $\#$