

(愛知工業大学 名電) 高等学校

H(29) 数学

(100点満点 (40) 分)

1. 次の問いに答えなさい。

(1) $(x-2y)^2 + (x+y)(x-5y) + 7y^2$ を因数分解しなさい。

(2) $\sqrt{2}=1.41$, $\sqrt{3}=1.73$ とするとき、次の値を求めなさい。

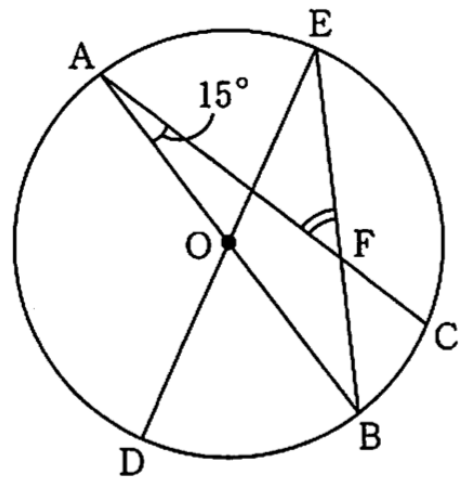
$$\sqrt{0.03} + \frac{4}{\sqrt{6}} \div \frac{\sqrt{2}}{6}$$

- (3) 2つの連立方程式 $\begin{cases} x+y=1 \\ ax+by=10 \end{cases}$ ・ $\begin{cases} 4x+3y=5 \\ bx+ay=-11 \end{cases}$ が同じ解をもつとき, a, b の値を求めなさい。

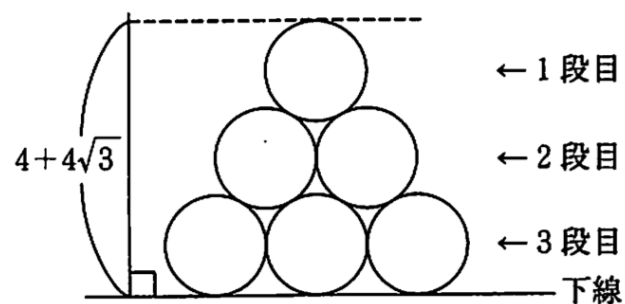
- (4) 長さ150mの列車が時速90kmで走っています。この列車が鉄橋の1km手前にあるトンネルを抜け始めてから、鉄橋を渡りきるまで3分かかりました。鉄橋の長さは何mか求めなさい。

- (5) 大小2個のさいころを同時に投げたとき、大きいさいころの目の数を a 、小さいさいころの目の数を b とします。このとき $\sqrt{2ab+4}$ が自然数となる確率を求めなさい。

- (6) 右の図のように、点Oを中心とする直径ABの円があります。
 $\angle BAC = 15^\circ$ となるように円周上に点Cをとり、 $\widehat{BC} : \widehat{BD} = 1 : 3$ となるように点Cを含まない $\widehat{AB}$ 上に点Dをとりま
 す。さらに、弦DEが直径となるように円周上に点Eをとり、
 弦ACと弦BEの交点をFとすると、 $\angle AFE$ の大きさを求め
 なさい。

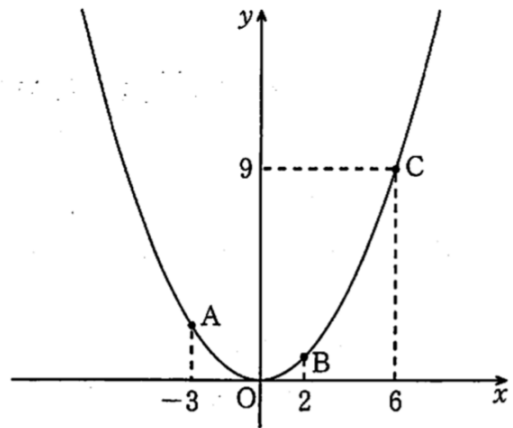


- (7) 下の図のように、同じ大きさのコインを1段目は1個、2段目は2個、3段目は3個とすきまなく並べます。下線から並べたコインの最高点までの長さが $4 + 4\sqrt{3}$ であったとき、コインの半径を求めなさい。



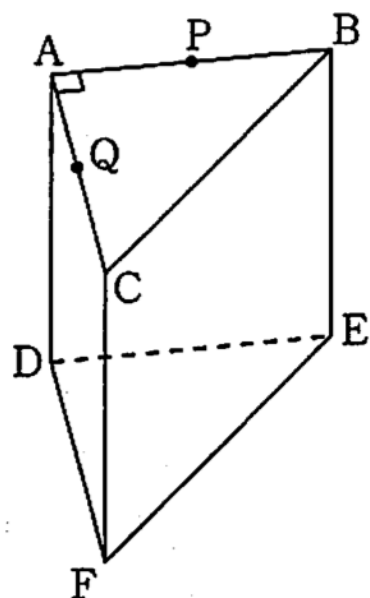
2 右の図のように、 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上に、 x 座標がそれぞれ -3 、 2 である点A、Bと点C(6, 9)をとります。次の問いに答えなさい。

- (1) 直線ABの方程式を求めなさい。
- (2) 直線ABと y 軸の交点をPとすると、 $\triangle PBC$ の面積を求めなさい。



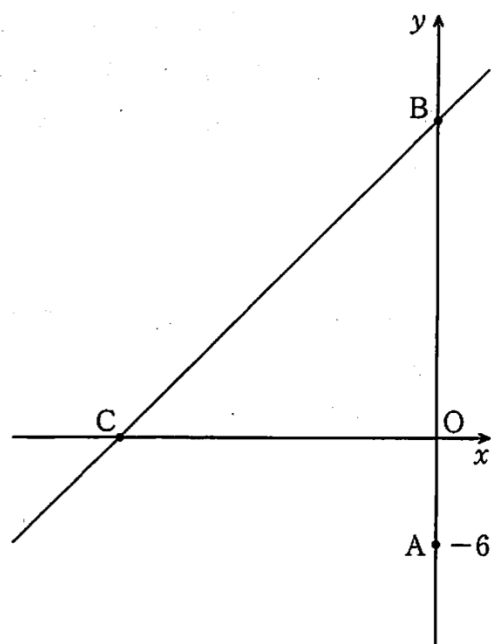
3 右の図のように、 $AB = 2\text{ cm}$ 、 $\angle A = 90^\circ$ の直角二等辺三角形を底面とする、高さ 2 cm の三角柱 $ABCDEF$ があります。辺 AB 、 AC の中点をそれぞれ P 、 Q とすると、次の問いに答えなさい。

- (1) 三角柱 $ABCDEF$ を3点 D 、 P 、 Q を通る平面で切ったときにできる2つの立体のうち、小さい方の立体の体積を求めなさい。
- (2) 三角柱 $ABCDEF$ を4点 E 、 F 、 P 、 Q を通る平面で切ったときにできる2つの立体のうち、小さい方の立体の体積を求めなさい。



- 4 右の図のように、 y 軸上に y 座標が -6 である点 A をとります。直線 $y = x + 18$ と y 軸との交点を B 、 x 軸との交点を C とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 線分 BC 上に点 P を、線分 AP が x 軸により 2 等分されるようにとります。このとき、 $BP : PC$ を最も簡単な整数比で表しなさい。
- (2) 線分 BC 上に点 P をとり、点 P を通り y 軸に平行な直線と、線分 AC との交点を Q とします。 $\triangle ABC$ の面積が $\triangle CPQ$ の面積の 16 倍であるとき、点 P の座標を求めなさい。



(100点満点 (40) 分)

1. 次の問いに答えなさい。

(1) $(x-2y)^2 + (x+y)(x-5y) + 7y^2$ を因数分解しなさい。

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{1} \underline{x^2 - 4xy + 4y^2} + \textcircled{2} \underline{x^2 - 4xy - 5y^2} + 7y^2 \\
 &= x^2 - 4xy + 4y^2 + x^2 - 4xy - 5y^2 + 7y^2 \\
 &= 2x^2 - 8xy + 6y^2 \\
 &= 2(x^2 - 4xy + 3y^2) \\
 &= 2(x-y)(x-3y) \\
 & \underline{\hspace{10em}} //
 \end{aligned}$$

①, ②

の展開

同類項まとめ

共通因数 2
をくくり出す。かけて $3y^2$ たいて $-4xy$ $-y$ と $-3y$

の組み合わせ

(2) $\sqrt{2}=1.41$, $\sqrt{3}=1.73$ とするとき、次の値を求めなさい。

$$\sqrt{0.03} + \frac{4}{\sqrt{6}} \div \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\sqrt{0.03} = \sqrt{\frac{3}{100}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{3}}{10} = \frac{1.73}{10} = 0.173$$

$$\frac{4}{\sqrt{6}} \div \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{4 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} \times \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3} \times \cancel{6}}{\cancel{6} \times \sqrt{2}} = 4\sqrt{3}$$

$$= 4 \times 1.73 = 6.92$$

$$0.173 + 6.92 = 7.093$$

(別ア700-4)

$$\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4 \times \sqrt{6}}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{2 \times 1.41 \times 1.73}{3} = \dots \text{となる}$$

計算がとても大変になります。

正しい計算ですが、時間がかかりすぎる解法は

使えないという判断力も磨いていく必要があります。

- (3) 2つの連立方程式 $\begin{cases} x+y=1 \\ ax+by=10 \end{cases}$ ・ $\begin{cases} 4x+3y=5 \\ bx+ay=-11 \end{cases}$ が同じ解をもつとき、 a, b の値を求めなさい。

同じ解をもつので、具体的な係数の式で連立方程式をつくる。

$$\begin{cases} x+y=1 & \dots \textcircled{1} \\ 4x+3y=5 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \times 4 - \textcircled{2}$$

$$4x+4y=4$$

$$-) 4x+3y=5$$

$$y=-1 \quad \textcircled{1} \text{に代入}$$

$$x-1=1$$

$$x=2$$

$$(x, y) = (2, -1)$$

$$\begin{cases} ax+by=10 \\ bx+ay=-11 \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = (2, -1)$$

を代入して a, b を求める。

$$\begin{cases} 2a-b=10 & \dots \textcircled{3} \\ -a+2b=-11 & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \times 2$$

$$2a-b=10$$

$$+) -2a+4b=-22$$

$$3b=-12$$

$$\textcircled{3} \text{に代入} \rightarrow b=-4$$

$$2a+4=10$$

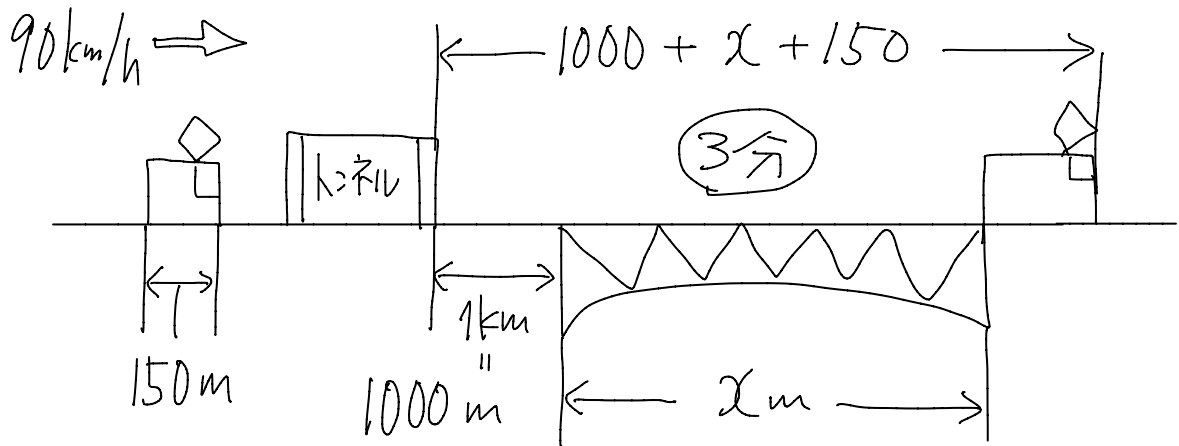
$$2a=6$$

$$a=3$$

$$(a, b) = (3, -4)$$

~~~~~ //

- (4) 長さ150mの列車が時速90kmで走っています。この列車が鉄橋の1km手前にあるトンネルを抜け始めてから、鉄橋を渡りきるまで3分かかりました。鉄橋の長さは何mか求めなさい。



- 与えられた情報が「分」と「m」なので  
90 km/h を m/分 に直して単位をそろえる。

$$90 \text{ km/h} = \frac{90 \times 1000}{60} = 1500 \text{ m/分}$$

- トンネルを抜け始めてから鉄橋を渡りきるまでの距離は「 $1000 + x + 150 \text{ (m)}$ 」。

速さは 1500 m/分 で 3分 かかりなので次の式を作る。

$$\frac{1000 + x + 150}{1500} = 3$$

$$1150 + x = 4500$$

$$x = 3350$$

$$3350 \text{ m}$$

~~~~~

- (5) 大小2個のさいころを同時に投げたとき、大きいさいころの目の数を a 、小さいさいころの目の数を b とします。このとき $\sqrt{2ab+4}$ が自然数となる確率を求めなさい。

$$\sqrt{2ab+4} = \sqrt{2(ab+2)} \text{ 自然数} \quad ab+2 = 2n^2$$

① 何にすればいい。

$$ab+2 = 2n^2$$

$$ab = 2n^2 - 2$$

$$= 2(n^2 - 1)$$

$$= 2(n+1)(n-1)$$

- $n=1$ のとき

$$ab = 2(1+1)(1-1) = 0 \text{ はない。}$$

- $n=2$ のとき

$$ab = 2(2+1)(2-1)$$

$$= 6$$

- $n=3$ のとき

$$ab = 2(3+1)(3-1)$$

$$= 16$$

- $n=4$ のとき

$$ab = 2(4+1)(4-1)$$

$$= 30$$

$$ab = 6, 16, 30 \text{ とある}$$

a と b の組み合わせ
を見つけた。

$$(a, b) =$$

$$6 \left\{ \begin{array}{l} (2, 3) \quad (3, 2) \\ (1, 6) \quad (6, 1) \end{array} \right.$$

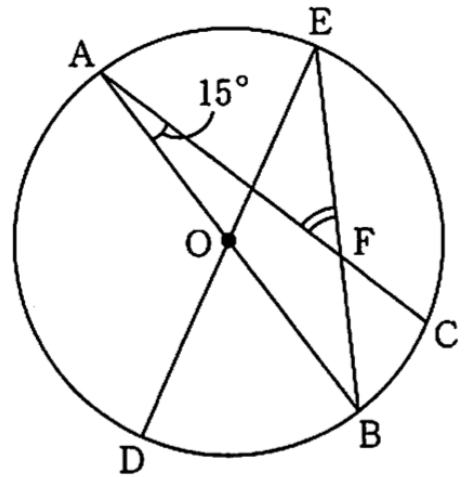
$$16 \left\{ (4, 4) \right.$$

$$30 \left\{ (5, 6) \quad (6, 5) \right.$$

の 7通り

$$\frac{7}{36}$$

- (6) 右の図のように、点Oを中心とする直径ABの円があります。
 $\angle BAC = 15^\circ$ となるように円周上に点Cをとり、 $\widehat{BC} : \widehat{BD} = 1 : 3$ となるように点Cを含まない $\widehat{AB}$ 上に点Dをとりま
 す。さらに、弦DEが直径となるように円周上に点Eをとり、
 弦ACと弦BEの交点をFとすると、 $\angle AFE$ の大きさを求め
 なさい。

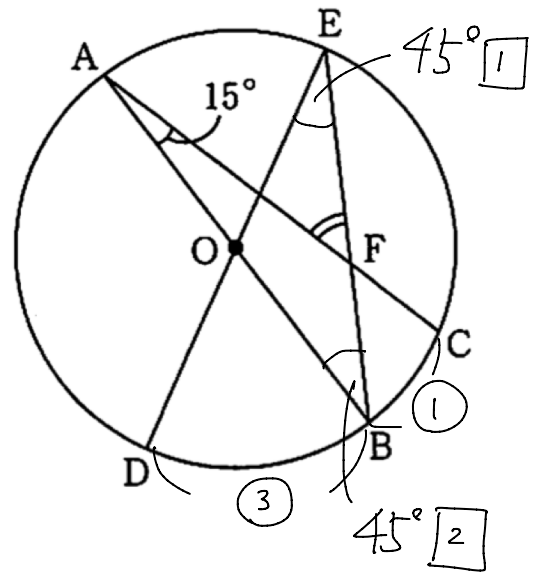


① 弧の長さの比 = 円周角の大きさ

なので

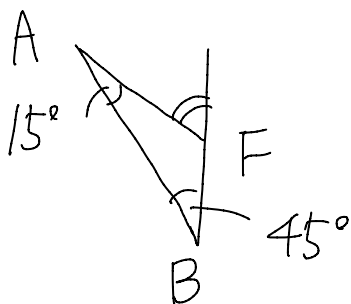
$$\widehat{BC} : \widehat{BD} = 1 : 3 \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} \angle DEB &= 3 \times \angle BAC \\ &= 3 \times 15 = 45^\circ \end{aligned}$$



- ② $\triangle OEB$ は $OE = OB$ の
 二等辺三角形 なので
 $\angle OBE = \angle OEB = 45^\circ$

- ③ $\triangle ABF$ において 外角の性質より

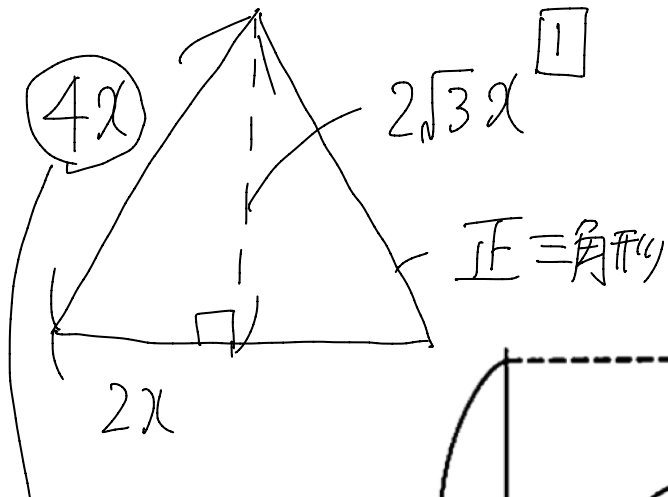


$$\begin{aligned} \text{求める } \angle AFE &= 15^\circ + 45^\circ \\ &= 60^\circ \end{aligned}$$

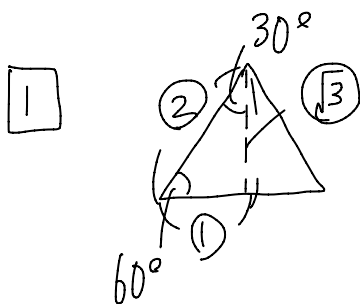
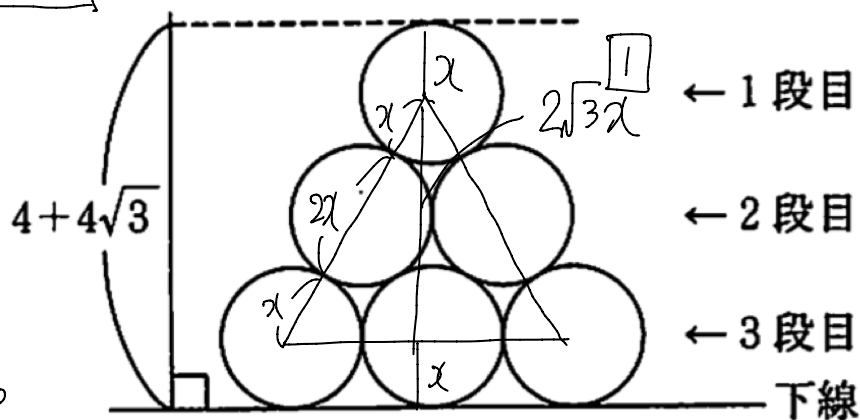
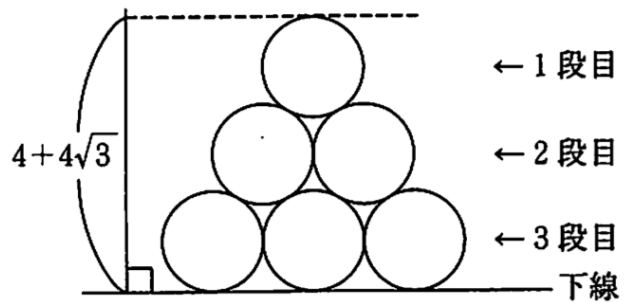
————— //

(7) 下の図のように、同じ大きさのコインを1段目は1個、2段目は2個、3段目は3個とすきまなく並べます。下線から並べたコインの最高点までの長さが $4 + 4\sqrt{3}$ であったとき、コインの半径を求めなさい。

求める半径を x とする。



3つの円が
すきまなく
並んでいるので



$30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形 なるべし
 $1:2:\sqrt{3}$ の上となるべし
 $2\sqrt{3}x$ となる。

② 高さの和が $4 + 4\sqrt{3}$ なるべし

$$x + 2\sqrt{3}x + x = 4 + 4\sqrt{3}$$

$$(2 + 2\sqrt{3})x = (2 + 2\sqrt{3}) \times 2$$

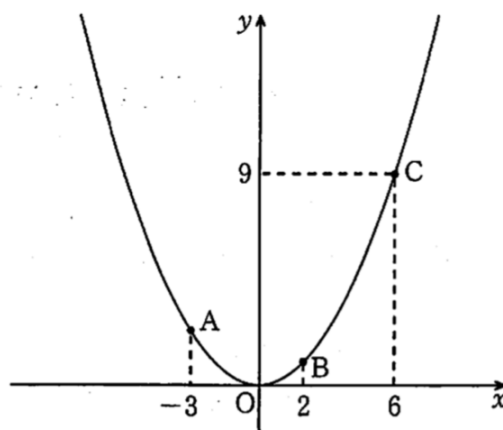
$$x = 2$$

2
— #

② 右の図のように、 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上に、 x 座標がそれぞれ -3 、 2 である点 A 、 B と点 $C(6, 9)$ をとります。次の問いに答えなさい。

(1) 直線 AB の方程式を求めなさい。

(2) 直線 AB と y 軸の交点を P とするとき、 $\triangle PBC$ の面積を求めなさい。



(1)
 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上の点であり、
 A, B の x 座標が $-3, 2$ なのでは

$$A\left(-3, \frac{9}{4}\right) \quad B(2, 1)$$

$$\text{傾き} = \frac{1 - \frac{9}{4}}{2 - (-3)} = \frac{-\frac{5}{4}}{5} = -\frac{1}{4}$$

$(2, 1)$ を通るので

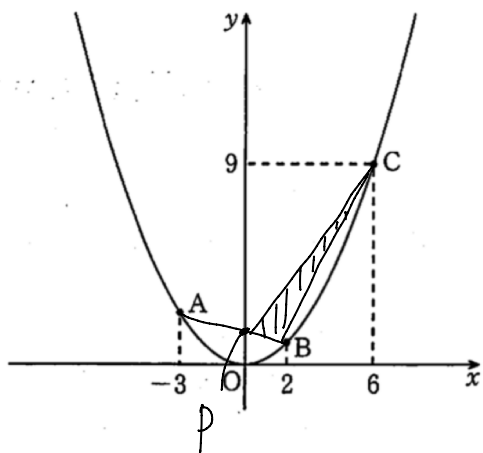
$$y = -\frac{1}{4}x + b \text{ に入}$$

$$1 = -\frac{1}{4} \times 2 + b \quad b = \frac{3}{2}$$

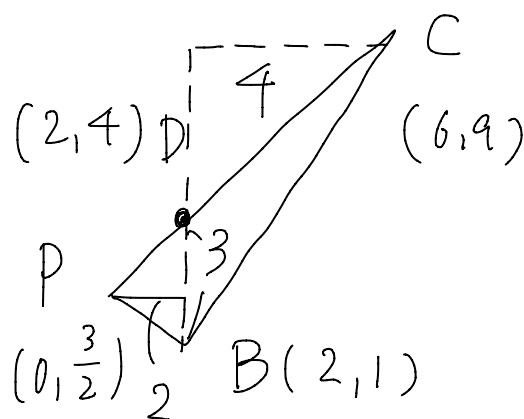
$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

——— #

(2)



(1) より $PC: y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$
 なのでは $P(0, \frac{3}{2})$



$$\triangle PBC =$$

$$\triangle PBD + \triangle DBC$$

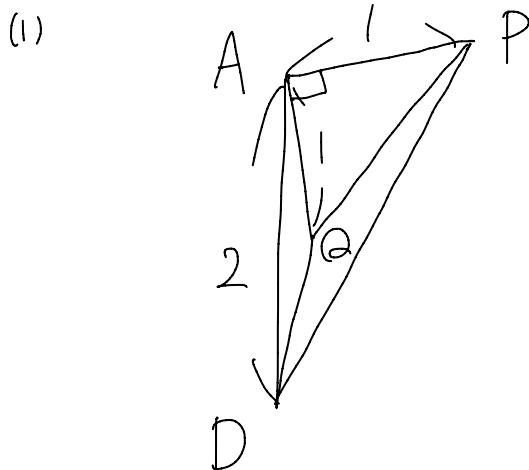
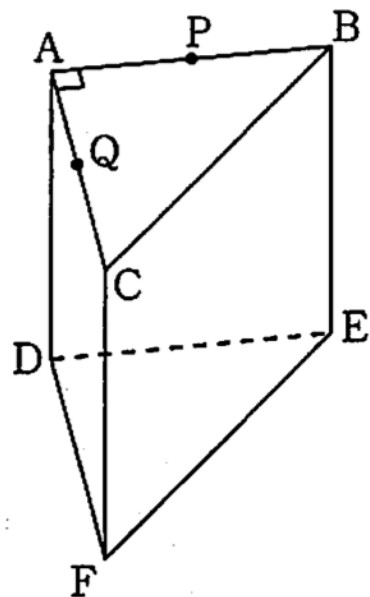
$$= 3 \times 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times 4 \times \frac{1}{2}$$

$$= 3 + 6 = 9$$

——— #

3 右の図のように、 $AB=2\text{ cm}$ 、 $\angle A=90^\circ$ の直角二等辺三角形を底面とする、高さ 2 cm の三角柱 $ABCDEF$ があります。辺 AB 、 AC の中点をそれぞれ P 、 Q とすると、次の問いに答えなさい。

- (1) 三角柱 $ABCDEF$ を3点 D 、 P 、 Q を通る平面で切ったときにできる2つの立体のうち、小さい方の立体の体積を求めなさい。
- (2) 三角柱 $ABCDEF$ を4点 E 、 F 、 P 、 Q を通る平面で切ったときにできる2つの立体のうち、小さい方の立体の体積を求めなさい。

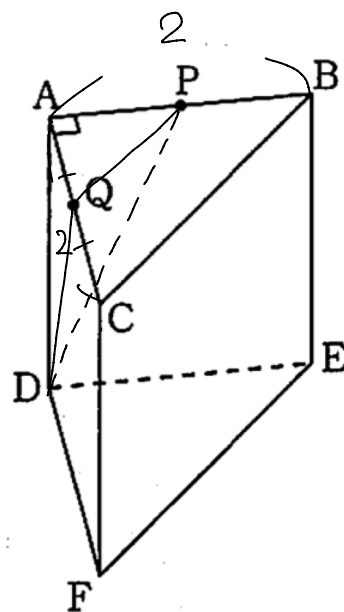


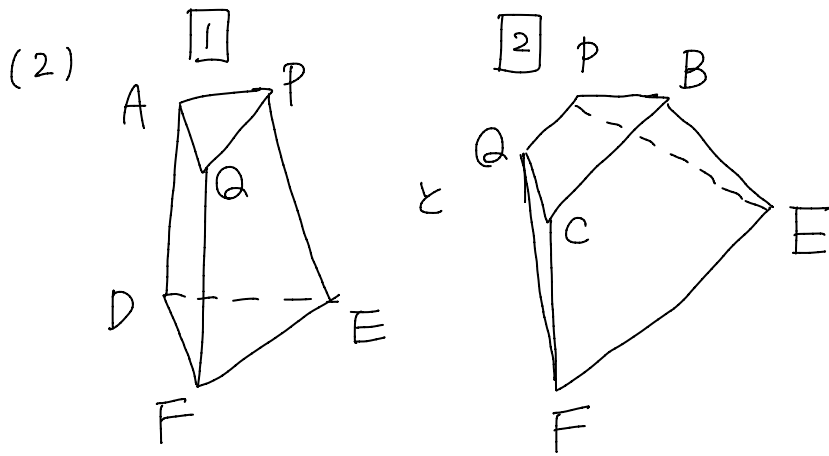
求める体積 $= DAPQ$

$$= \text{底面積 } \triangle APQ \times \text{高さ } AD \times \frac{1}{3}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ cm}^2$$

——— //





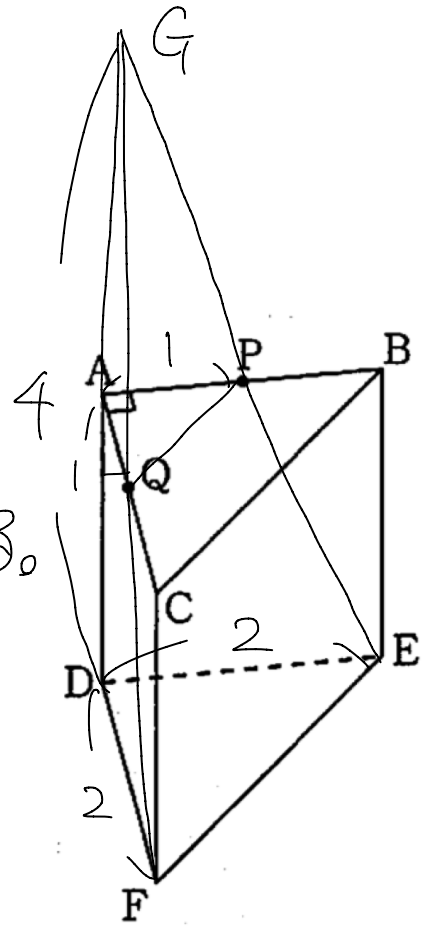
の体積の大小と比較する。

求めたいのは ①。

$$DF = AQ = 2 = 1 \text{ より}$$

$$GA : AD = 1 : 1 \text{ なので}$$

$$GA = AD = 2 \text{ cm}$$



$$\text{①} : (G-DEF) - (G-APQ)$$

$$= \left(2 \times 2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{3} \right) - \left(1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\text{①} = \frac{7}{3}, \text{ ②} = \frac{5}{3}$$

よって小さいのは $\frac{5}{3}$

$$\text{②} : \text{三角柱} - \text{①}$$

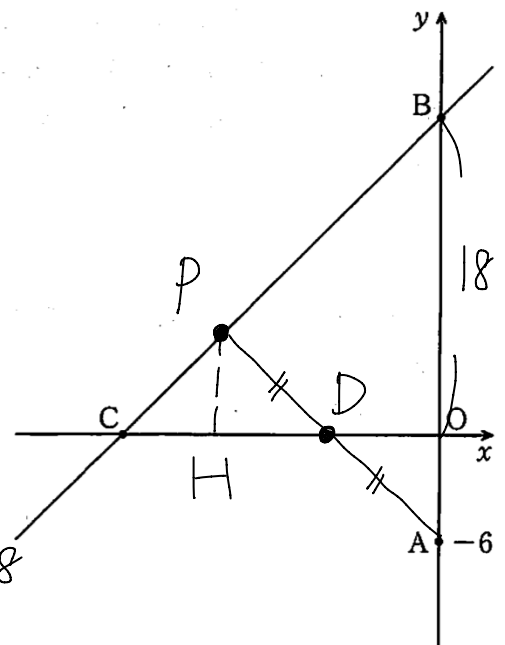
$$= 2 \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2 - \frac{7}{3}$$

$$= 4 - \frac{7}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} \text{ cm}^3 //$$

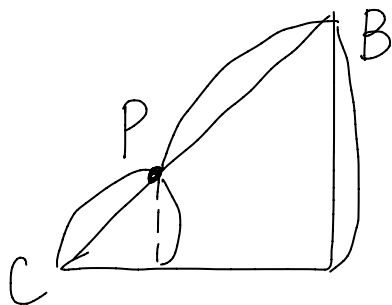
- 4 右の図のように、 y 軸上に y 座標が -6 である点 A をとります。直線 $y = x + 18$ と y 軸との交点を B 、 x 軸との交点を C とするとき、次の問いに答えなさい。

- (1) 線分 BC 上に点 P を、線分 AP が x 軸により 2 等分されるようにとります。このとき、 $BP : PC$ を最も簡単な整数比で表しなさい。
- (2) 線分 BC 上に点 P をとり、点 P を通り y 軸に平行な直線と、線分 AC との交点を Q とします。 $\triangle ABC$ の面積が $\triangle CPQ$ の面積の 16 倍であるとき、点 P の座標を求めなさい。



(1) AP が x 軸により 2 等分する
ので右図となり

$BP = PC$ を求めたいのでこの相似の比を用いる

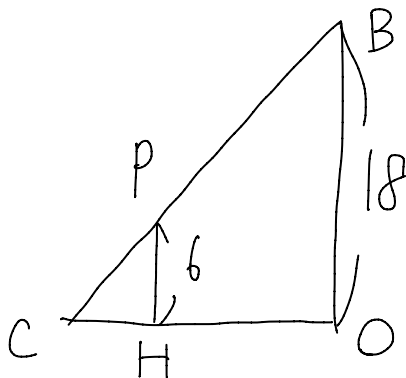


ことが出来るだろうと考える。

P から x 軸への垂線を引き、交点を H とすると、 $PH \parallel BA$

なので $\triangle PHD \equiv \triangle AOD$

となり $PH = OA = 6$



よって左の図となり求めたい

$BP : PC$ は $PH : BO = 6 : 18$
 $= 1 : 3$

より $BP : PC = 2 : 1$

//

- (2) 線分BC上に点Pをとり、点Pを通りy軸に平行な直線と、線分ACとの交点をQとします。△ABCの面積が△CPQの面積の16倍であるとき、点Pの座標を求めなさい。

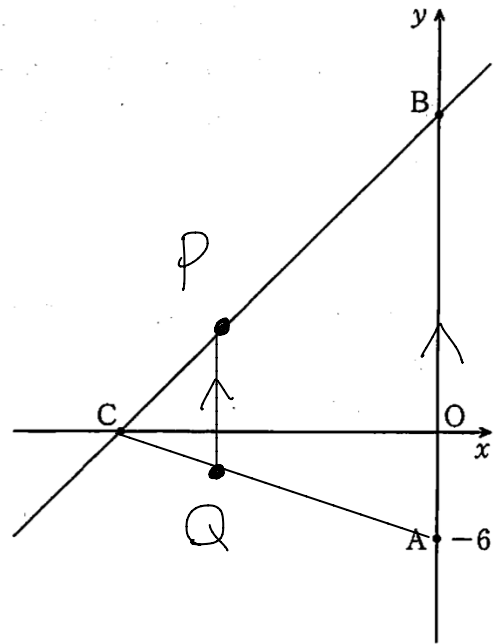
$$\triangle CPQ \times 16 = \triangle ABC \quad \text{と、}$$

$$\triangle CPQ \sim \triangle CBA \quad \text{と、}$$

面積比が $1:16$ より

相似比は $1:4$ とわかる。

$$\left(\text{面積比} = (\text{相似比})^2 \right)$$



$$\cancel{18} \times \frac{3}{\cancel{4}_2} = \frac{27}{2}$$

よって H の x 座標 (P の)

$$\text{は } -\frac{27}{2} \text{ とわかる。}$$

$$y = x + 18 \text{ となる。}$$

$$y = -\frac{27}{2} + 18 = -\frac{27}{2} + \frac{36}{2} = \frac{9}{2}$$

$$P \left(-\frac{27}{2}, \frac{9}{2} \right)$$

