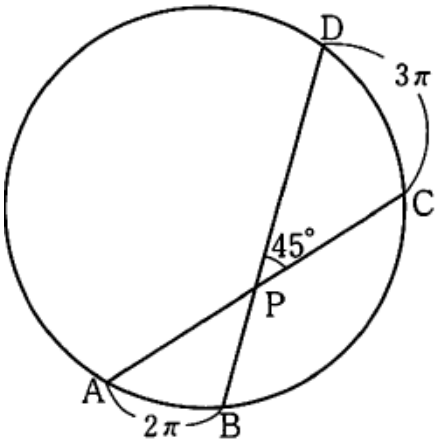
難関私立高校対策　シンプル難問

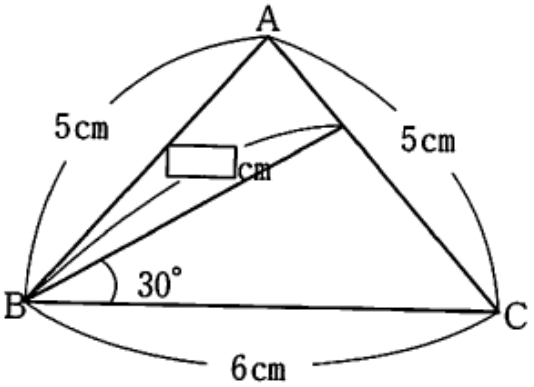
※新たな視点を学び、解決の幅を広げる良問を扱います。シンプルに見えて手ごわい問題です。

（１）３５ｘ＋３２ｙ＝２０１５を満たす
自然数ｘ、ｙをすべて求めなさい。

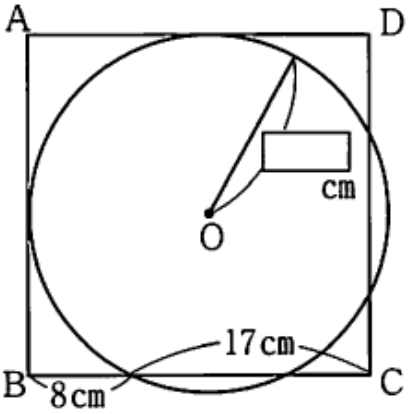
（２）次の円の面積を求めなさい。



（３）図の四角に当てはまる長さを求めなさい。



（４）円の半径を求めなさい。



□ABCD は正方形

（1）35x＋32y＝2015を満たす　…①
自然数x、yをすべて求めなさい。

- 35に着目し，$35x+35y-3y=35\times57+20$
$35(x+y-57)=3y+20$ …② ←（☆）Point
ここで，$3y+20$ が35の倍数となる最小の y は $\underline{y=5}$ である。
$y=5$ を②に代入すると $35(x+5-57)=3\times5+20$，$\underline{x=53}$
$(x,y)=(53,5)$ が解の1つである。

- ①の式より $y=-\frac{35}{32}x+\frac{2015}{32}$ と変形。
1つの解が $(x,y)=(53,5)$ なので 下の方法より
$+32\downarrow$ $\downarrow-35$
$(85,-30)$ これは y が自然数でなく ×
$(53,5)$ から上に戻せば $(21,40)$ でok。もう1段戻ると
$(-32,10)$ で ×
$\therefore$ $\underline{(x,y)=(21,40),(53,5)}$ //

◎新たな視点（不定方程式）
…解がただ1つに決まらない方程式

例 $3x+2y=24$ のように文字の数が式の本数より多い式のことです。
$y=-\frac{3}{2}x+12$ と変形。
例えば
$(x,y)=(2,9)$ を1つ見つけると
$+2\downarrow$ $\downarrow-3$
$(4,6)$
$+2\downarrow$ $\downarrow-3$
$(6,3)$ と次々と見つけられるのです。
⋮。

☆Point
x,y 両方を相手にするのは大変なので y だけにして，左辺の $35\times\square$ より，35の倍数としぼりこむことが目的。

例題

3種類のお菓子 A, B, C があり, 1個の値段は
それぞれ 140円, 117円, 94円 である。
これらの菓子を合わせて n 個買ったところ、代金は
ちょうど 3000円になった。菓子Aを a 個, 菓子
Bを b 個買ったとして 次の各問いに答えなさい。

(1) n, a, b の関係を等式に表しなさい。

(2) n の値を求めなさい。

[解答欄]

[解説

(1) 菓子Cの個数は $n-a-b$（個）なので

代金の式は，$140a+117b+94(n-a-b)=3000$

$46a+23b+94n=3000$ //

(2) 右辺をnの式にしたいのと，左辺が23の倍数になりそうなことより，

$46a+23b+92n+2n=2990+10$ と分けられる。

$46a+23b+92n-2990=-2n+10$

$23(2a+b+4n-130)=-2n+10$

- 右辺が－でやりづらいので

$23(130-2a-b-4n)=2n-10$ と変形。

- 右辺は23の倍数でnは自然数なので

$2n-10=0,\ 23,\ 46\ \cdots$ となり

$n=5,\ 28,\ 51,\ \cdots$ が候補となる。

- nはA，B，Cの合計個数であり，範囲をしぼると，

nは全てAの140円お菓子で買ったときが最小

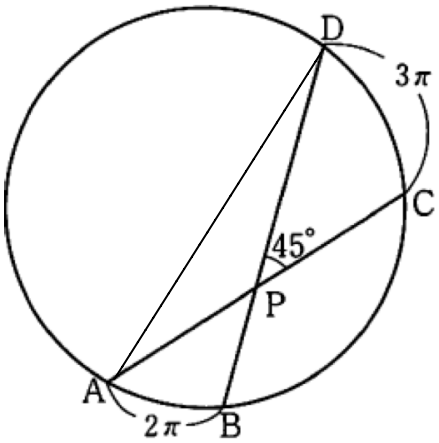
Cの94円 〃 最大 なので

$$\frac{3000}{140} < n < \frac{3000}{94}$$

$\frac{3000}{140}=21.\cdots$　　$\frac{3000}{94}=31.\cdots$

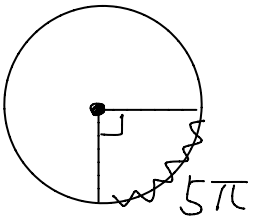
$\therefore\ n=28$ //

（2）次の円の面積を求めなさい。　　［ 具体的な値をヒントに ］



- ADを結ぶと △APDにおいて
  ∠ADP が $\overset{\frown}{AB}$ の円周角
  ∠DAP が $\overset{\frown}{DC}$ の円周角 となり
  外角の性質より
  ∠ADP＋∠DAP ＝ 45°

- つまり 弧の長さ 2π＋3π＝5π の円周角が 45°
  なので 中心角は 45°×2 ＝ 90° となる。



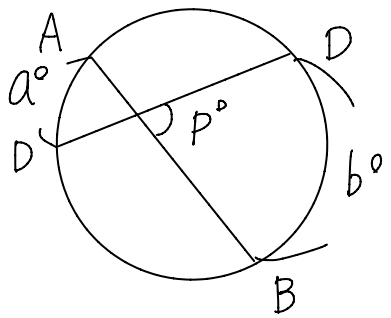
- 中心角90°を生む 弧の長さが 5π
  なので この円周の長さは 5π×4＝20π

（半径＝r とおく）

- 円周の長さ ＝ 直径×π より
  20π ＝ 2r×π ⟶ r＝10

- 円の面積 ＝ 半径^2×π ＝ 100π

アルハゼンの定理

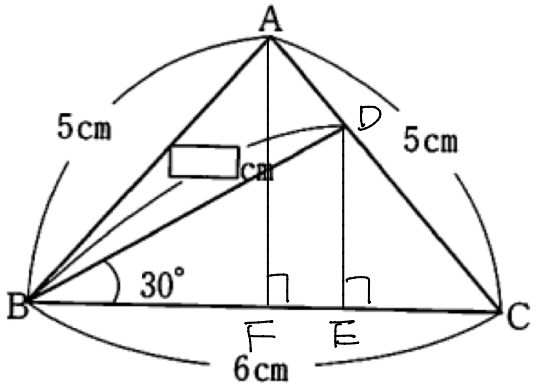


$\overset{\frown}{AB}$ の円周角 ＝ a°
$\overset{\frown}{DB}$ の円周角 ＝ b°　とすると

p° ＝ a°＋b°

補助線と外角の性質で説明できる
簡単な話なので定理を覚えなくてよいです。

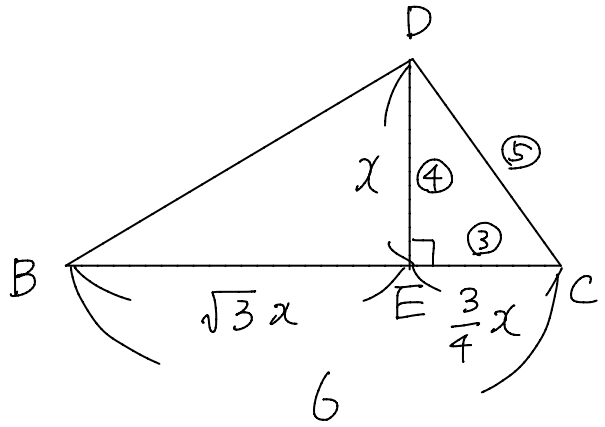
（3）図の四角に当てはまる長さを求めなさい。　［ 方程式を立てる ］



• △BDE は 30°, 60°, 90° の直角三角形になる。
比の基本となる DE = x
とおくと BD = $2x$
BE = $\sqrt{3}x$ と表せる。

• AF ⊥ BC なので F は BC の中点となり FC = $\frac{1}{2}$BC = 3。
FC = 3, AC = 5 より △AFC は 3:4:5 の直角三角形。

• DE // AF より △DEC も 3:4:5 なので EC = $\frac{3}{4}x$ となる。



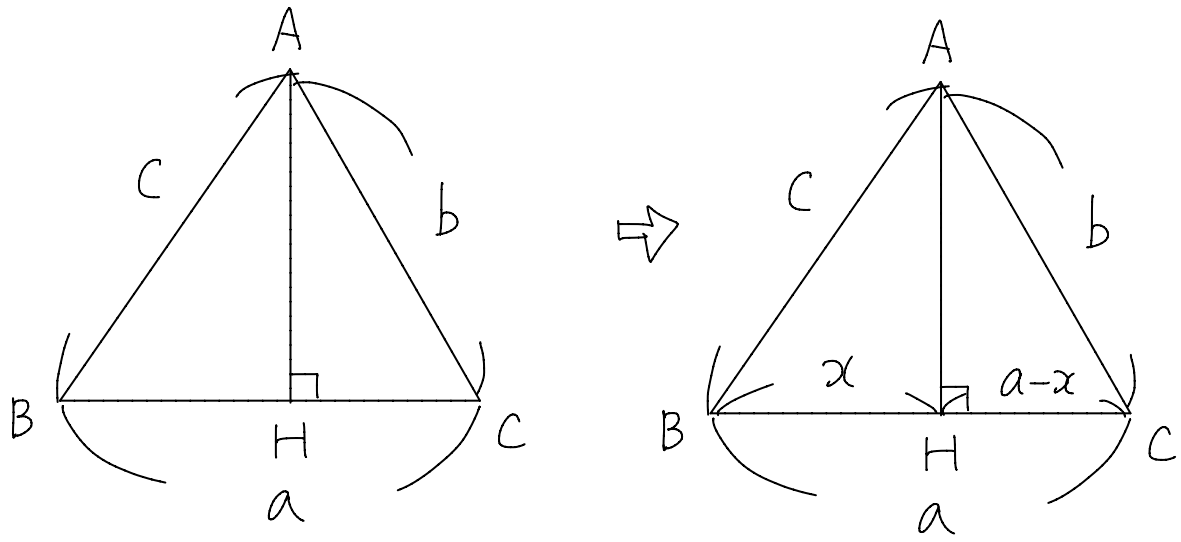
• BC = 6 より
BC = BE + EC
$6 = \sqrt{3}x + \frac{3}{4}x$
$6 = \frac{4\sqrt{3}x + 3x}{4}$

$\frac{4\sqrt{3}+3}{4}x = 6 \xrightarrow{\times 4} (4\sqrt{3}+3)x = 24$

$x = \frac{24}{4\sqrt{3}+3} = \frac{24(4\sqrt{3}-3)}{(4\sqrt{3}+3)(4\sqrt{3}-3)} = \frac{24(4\sqrt{3}-3)}{48-9} = \frac{8(4\sqrt{3}-3)}{13}$

求める BD = $2x = 2 \times \frac{8(4\sqrt{3}-3)}{13} = \frac{16(4\sqrt{3}-3)}{13}$ //

◎ 方程式を立てる代表例

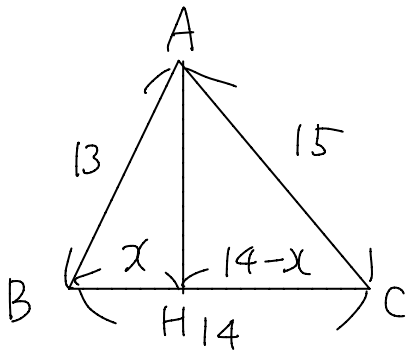


右図のように BH = x として，△ABH，△ACH に三平方の定理を用いて，

$$AH^2 = c^2 - x^2$$
$$AH^2 = b^2 - (a-x)^2$$

∴ $c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$ となり x の方程式を解けば x が求まり，AH が求まり △ABC の面積も求まります。

例題　1辺が 13cm，14cm，15cm の三角形の面積は？



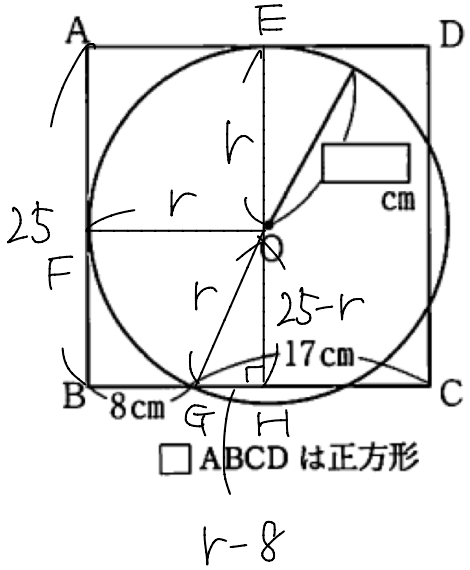
BH = x とおいて

$$13^2 - x^2 = 15^2 - (14-x)^2$$

$x = 5$ なので AH = 12 となり

$$\triangle ABC = 14 \times 12 \times \frac{1}{2} = 84\ cm^2$$

（4）円の半径を求めなさい。



［　中心線 と 接点半径　］

- 接点への半径を引く。
  EO, FO = r となり
  正方形との交点 G へと,
  中心を通る線と正方形との
  交点 H へと引くと
  OG = r, OH = 25 − r
  GH = r − 8 と表せる。

- △OGH が直角三角形
  となるので、三平方の定理を用いると

$$(25-r)^2+(r-8)^2=r^2$$

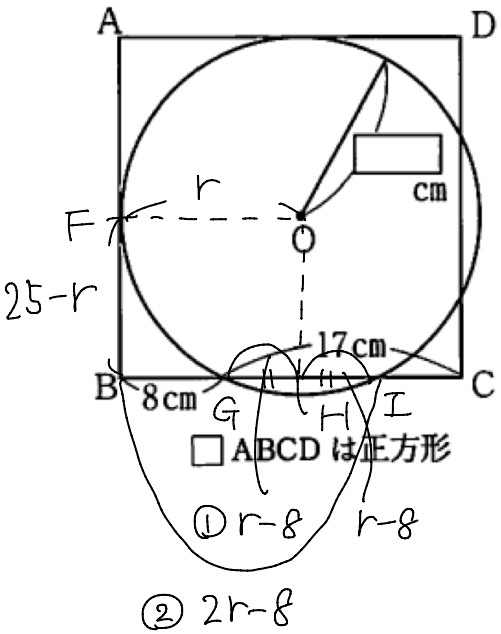
$$r^2-66r+689=0$$

$$(r-53)(r-13)=0$$

$r<25$ より

$r=13$cm

［別アプローチ］

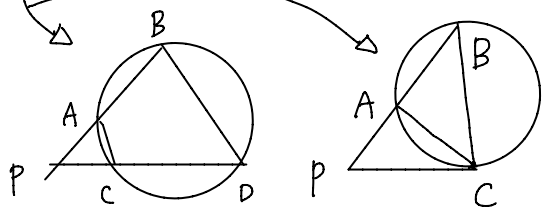


① OF = 8 より
GH = BH − BG
= FO − BG = r − 8 = HI

② BI = BG + GH + HI
= 8 + r − 8 + r − 8 = 2r − 8

- 方べきの定理より

$(25-r)^2=8\times(2r-8)$, $r=13$



← 接点の場合

PA×PB = PC×PD　　PA×PB = PC×PC