# (　　滝　　)高等学校　H(30)数学

（１００点満点　（ 60 ）分）

１．次の問いに答えなさい。

⑴　$x^3y-4xy^3$ を因数分解せよ。

⑵　$(x-2)(x-4)=6$ を解け。

⑶　１ｇ，２ｇ，３ｇの３種類の分銅を用いて，ちょうど７ｇのものをはかるとき，分銅の個数の組み合わせは何通りあるか。ただし，十分に分銅はあり，使わない分銅があってもよいものとする。

(4) 次は，夏休み中に図書館で１冊以上本を借りた７人の生徒が借りた本の冊数のデータである。
$a$ の値がわからないとき，次の①から④のうち，正しいものをすべて選べ。

9，3，7，4，16，$a$，10

① 中央値になりうるのは，７と９のみである。

② このデータの平均値は７になりうる。

③ 10は最頻値になりうる。

④ データの範囲は12になりえない。

## 2.

ある店の客数を１月，２月，３月の３カ月間にわたって調べた。２月の客数について，男性の客数は１月より10％減少し，女性の客数は１月より10％増加し，全体としては１月より１％減少した。また，３月の客数は２月の客数より２割増加した。２月の客数が１月の客数より30人減少したとして，次の各問いに答えよ。

⑴　３月の客数を求めよ。

⑵　２月の女性の客数を求めよ。

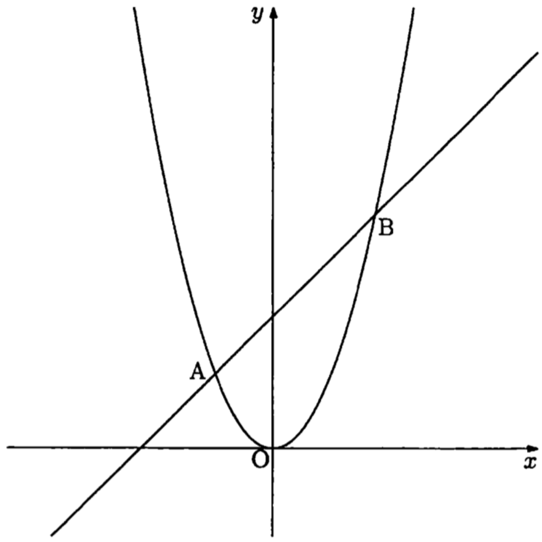
## 3.

右図のように，放物線 $y=ax^2$ $(a>0)$ と直線 $y=x+4$ が２点A，Bで交わっている。ただし，点Aの $x$ 座標は点Bの $x$ 座標より小さいものとする。直線OBの傾きが２であるとき，次の各問いに答えよ。

(1) $a$ の値を求めよ。

(2) 点Aを通る直線が△OABの面積を３：１に分けるとき，その直線の式をすべて求めよ。

(3) 直線 $y=x+4$ と $y$ 軸との交点をＣとする。点Ｃを通る直線が△OABの面積を２等分するとき，その直線の式を求めよ。



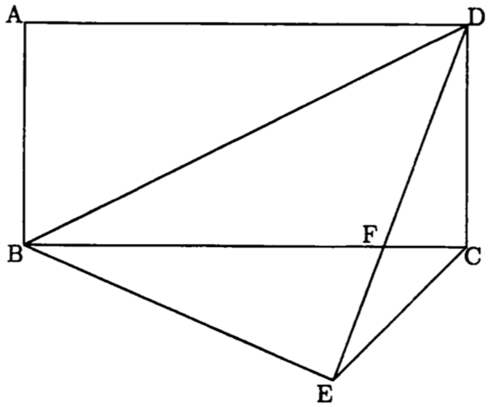
## 4.

右図のように，四角形ABCDはAB＝１，AD＝３の長方形である。また，△DBEは∠BED＝90°の直角二等辺三角形である。辺BCと辺DEの交点をＦとするとき，次の各問いに答えよ。

⑴　BEの長さを求めよ。

⑵　△DBFの面積を求めよ。

⑶　ECの長さを求めよ。



5.

図１は水平な地面に真っ直ぐ立っている４つの壁に囲まれた長方形の形をした場所を上から見たものである。壁の長さはAB＝80cm，BC＝50cm であった。地点Ｘに置いた球を何回か壁で跳ね返らせて，地点Ｙに到達させることを考える。壁での跳ね返りは図２のように入射角と反射角が等しくなるように跳ね返るものとする。また，跳ね返り以外では球は必ず直進するものとして，地点Ｙに到達するまでは止まることはない。球の大きさは無視できるものとして，次の各問いに答えよ。

⑴　AB上の地点Ｐで跳ね返らせる。その後，跳ね返ることなく，地点Ｙに到達させるためには，APを何cmにすればよいか。

⑵　AB上の地点Ｑで跳ね返らせ，次にＢＣ上で跳ね返らせる。その後，跳ね返ることなく，地点Ｙに到達させるためには，AQを何cmにすればよいか。

⑶　AB上の地点Ｒで跳ね返らせ，次にBC，CD，DA，ABの順で跳ね返らせる。その後，跳ね返ることなく，地点Ｙに到達させるためには，ARを何cmにすればよいか。

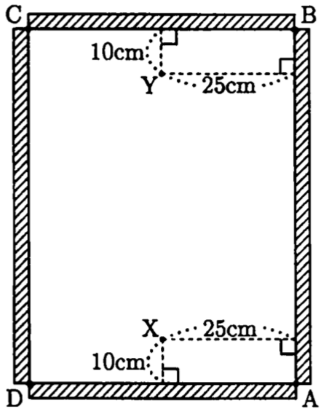


図１

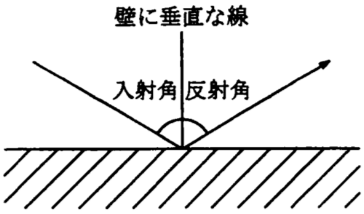


図２

## 6.

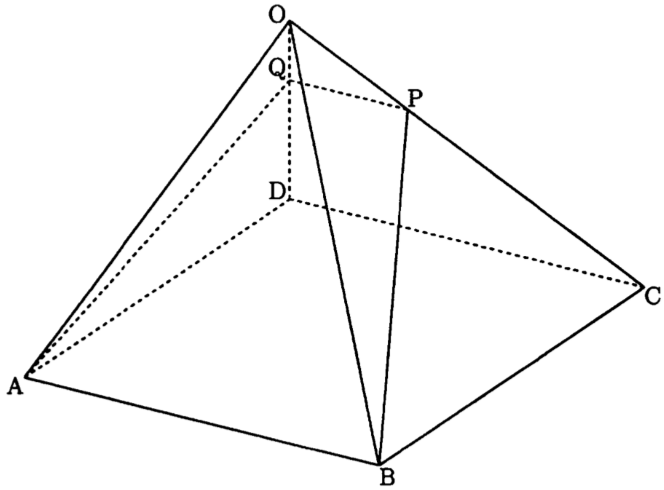
図のように，各辺の長さが１である正四角錐O‐ABCDがある。この正四角錐を，辺ABを通る平面で切り，台形PQABを作った。OP＝$\frac{1}{3}$のとき，次の各問いに答えよ。

⑴　PBの長さを求めよ。

⑵　台形PQABの面積を求めよ。

⑶　PQの中点をM，ABの中点をNとするとき，∠OMN＝90°であることを証明せよ。

⑷　四角錐O‐ABPQの体積は，正四角錐O‐ABCDの体積の何倍であるか求めよ。



## （　滝　）高等学校　H( 30 )数学

（１００点満点　（ 60 ）分）　　［解説］

１．次の問いに答えなさい。

(1) $x^3y - 4xy^3$ を因数分解せよ。

$= xy(x^2 - 4y^2)$ ①

$= xy(x+2y)(x-2y)$ ②

① 全ての項に $x$ と $y$ がかけられているので「共通因数」$xy$ を（　）の外へくくり出す。

② $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ の利用

(2) $(x-2)(x-4) = 6$ を解け。

$x^2 - 6x + 8 = 6$

$x^2 - 6x + 2 = 0$

$36-8=28$

$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2}$

$= \dfrac{6 \pm \sqrt{28}}{2} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{7}}{2}$

$x = 3 \pm \sqrt{7}$ //

(3) １ｇ，２ｇ，３ｇの３種類の分銅を用いて，ちょうど７ｇのものをはかるとき，分銅の個数の組み合わせは何通りあるか。ただし，十分に分銅はあり，使わない分銅があってもよいものとする。

方針　1種類の分銅を用いる場合の数が最も少ないのは、「3g」の0コ，1コ，2コの3つの場合。これをベースに考える。

(i) 3g…2コの場合　$7 = 3+3+1$ の 1通り

(ii) 1コの場合

$7 = 3+1+1+1+1$
$= 3+2+1+1$
$= 3+2+2$

の 3通り

(iii) 0コの場合

$7 = 1+1+1+1+1+1+1$
$= 2+1+1+1+1+1$
$= 2+2+1+1+1$
$= 2+2+2+1$

の 4通り

以上より 8通り //

(4) 次は，夏休み中に図書館で1冊以上本を借りた7人の生徒が借りた本の冊数のデータである。
$a$ の値がわからないとき，次の①から④のうち，正しいものをすべて選べ。

9，3，7，4，16，$a$，10

① 中央値になりうるのは，7と9のみである。　② このデータの平均値は7になりうる。
③ 10は最頻値になりうる。　④ データの範囲は12になりえない。

方針
3　4　7　9　10　16
$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$
$a$ は ∧ のどこかに入るとして考える。

① $\boxed{4}$ に $a=8$ が入ると，中央値が「8」になり ×

② 7人の平均が $\dfrac{9+3+7+4+16+a+10}{7}=7$ の等式を満たすかどうか調べる。

$$\frac{a+49}{7}=7 \qquad a+49=49 \qquad a=0$$

1冊以上本を借りたことにならず ×

③ $a=10$ のとき，10が2人となり最頻値になる。〇

④ $a$ が確定していない時点で
範囲 = 最大値 − 最小値 = $16-3=13$ なので
12にはなりえない。〇

以上より ③，④ //


資料の活用の「用語の定義」をおさえ，
1問1問 正確な値を求めて解こう！

2．

　ある店の客数を１月，２月，３月の３カ月間にわたって調べた。２月の客数について，男性の客数は１月より10％減少し，女性の客数は１月より10％増加し，全体としては１月より１％減少した。また，３月の客数は２月の客数より２割増加した。２月の客数が１月の客数より30人減少したとして，次の各問いに答えよ。

⑴　３月の客数を求めよ。

⑵　２月の女性の客数を求めよ。

| | 男 | 女 | 計 |
|---|---|---|---|
| 1月 | $x$ | $y$ | $x+y$ |
| 2月 | $0.9x$ | $1.1y$ | $0.99(x+y)$ |
| 3月 | | | |

② $-30$

(1)

1月の男性客数，女性客数を $x$人，$y$人とする。

② より $x+y-0.99(x+y)=30$

$0.01(x+y)=30$

$x+y=3000$ … ②'

① $0.99(x+y)\times1.2$

$x+y=3000$ を ① $0.99(x+y)\times1.2$ に代入し，$0.99\times3000\times1.2=\underline{3564人}$ //

(2) 2月の表より

$0.9x+1.1y=0.99(x+y)$

$\downarrow \times100$

$90x+110y=99(x+y)$

$-9x+11y=0$

②' より $x+y=3000$

$\begin{cases} -9x+11y=0 \\ x+y=3000 \end{cases}$

$\to y=1350$

$1350\times1.1=\underline{1485人}$ //

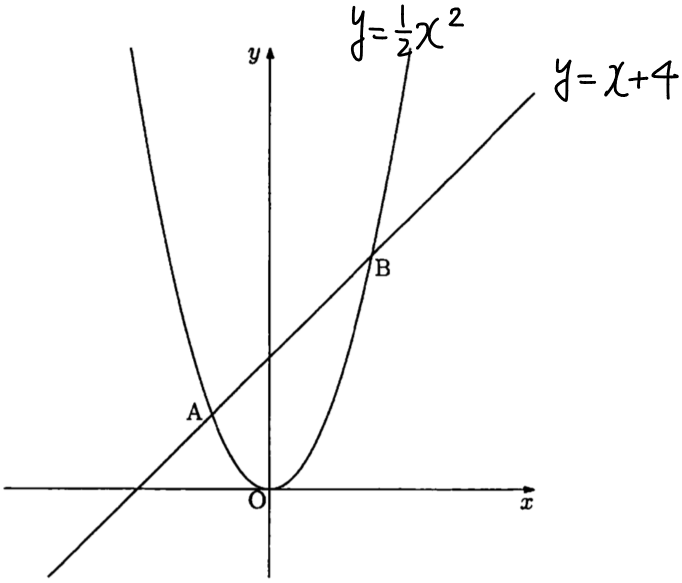
3.

右図のように，放物線 $y = ax^2\ (a > 0)$ と直線 $y = x + 4$ が2点A，Bで交わっている。ただし，点Aの $x$ 座標は点Bの $x$ 座標より小さいものとする。直線OBの傾きが2であるとき，次の各問いに答えよ。

(1) $a$ の値を求めよ。

(2) 点Aを通る直線が△OABの面積を 3 : 1 に分けるとき，その直線の式をすべて求めよ。

(3) 直線 $y = x + 4$ と $y$ 軸との交点をCとする。点Cを通る直線が△OABの面積を2等分するとき，その直線の式を求めよ。




(1) OBの傾き 2 より OB : $y = 2x$

$y = x + 4$ との交点が B なので

$\begin{cases} y = 2x \\ y = x + 4 \end{cases}$ より $(x, y) = (4, 8)$

$y = ax^2$ に $(4, 8)$ を代入し

$8 = 16a \rightarrow \underline{a = \frac{1}{2}}$ //

---

(2) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = x + 4 \end{cases}$ から

Aの座標を求める。

$\frac{1}{2}x^2 = x + 4$

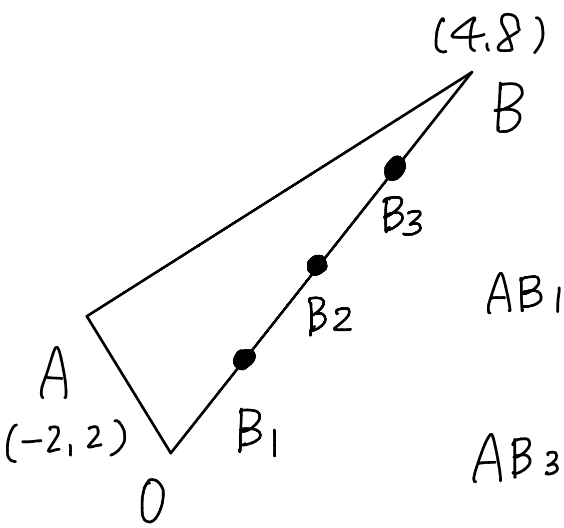
$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x - 4)(x + 2) = 0$

$x = 4, -2$

A$(-2, 2)$

B$(4, 8)$




OABの面積が 3:1 になるのは，B1 と B3 を通るとき

B$(4.8)$より B1$(1, 2)$，B3$(3, 6)$

AB1 : A$(-2,2)$ B1$(1,2)$ を通るので

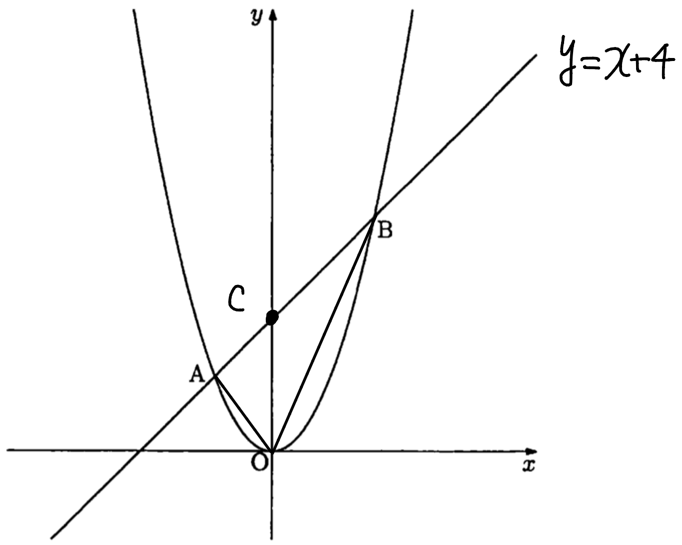
$\underline{y = 2}$ //

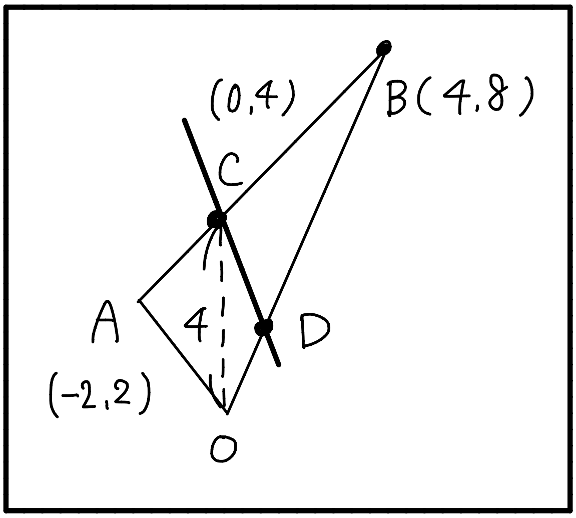
AB3 : A$(-2,2)$ B3$(3,6)$ を通るので

$\underline{y = \frac{4}{5}x + \frac{18}{5}}$ //

右図のように，放物線 $y=ax^2\ (a>0)$ と直線 $y=x+4$ が2点A，Bで交わっている。ただし，点Aの $x$ 座標は点Bの $x$ 座標より小さいものとする。直線OBの傾きが2であるとき，次の各問いに答えよ。

(3) 直線 $y=x+4$ と $y$ 軸との交点をCとする。点Cを通る直線が△OABの面積を2等分するとき，その直線の式を求めよ。



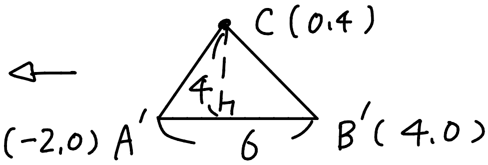




方針

$$\triangle OAC + \triangle OCD = \triangle BCD = \frac{1}{2}\triangle OAB$$

となるDの座標を求める。

- $\triangle OAB = 6 \times 4 \times \frac{1}{2} = 12$




- $\triangle OAC = 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 4$

以上より $\triangle OCD = 12 \div 6 - 4 = 2$ となればよい。

- Dの $x$ 座標を $t$ とすると，$y=x+4$ 上の点なので D$(t, t+4)$

- $\triangle OCD = 4 \times t \times \frac{1}{2} = 2$ より $t=1$ なので D$(1, 2)$

よって CD : $y = -2x+4$ //

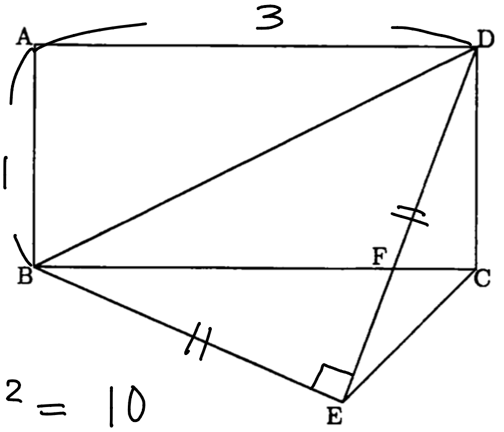
4.

右図のように，四角形ABCDはAB＝１，AD＝３の長方形である。また，△DBEは∠BED＝90°の直角二等辺三角形である。辺BCと辺DEの交点をＦとするとき，次の各問いに答えよ。

(1) BEの長さを求めよ。

(2) △DBFの面積を求めよ。

(3) ECの長さを求めよ。



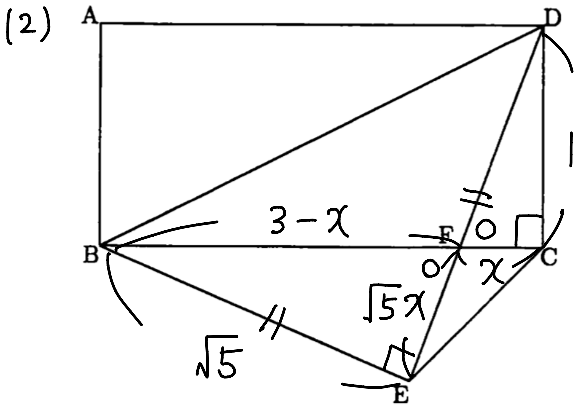

(1) $BD^2 = AB^2 + AD^2 = 1^2 + 3^2 = 10$

$10 = BE^2 + ED^2$

$10 = 2BE^2$ （BE＝EDより） ∴ $\underline{BE = \sqrt{5}}$ //

---

(2)




・△BEF∽△DCF

（ ∠BFE＝∠DFC （対頂角）
∠BEF＝∠DCF＝90° ）

・FC＝$x$とおくと，
BF＝BC－FC＝$3-x$ であり，
△BEFと△DCFの相似比が
$\sqrt{5}:1$ なので FE＝$\sqrt{5}x$

・△BEFで三平方の定理より

$BE^2 + EF^2 = BF^2$

$(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5}x)^2 = (3-x)^2$

$5 + 5x^2 = 9 - 6x + x^2$

$4x^2 + 6x - 4 = 0$

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times (-2)}}{4}$

$= \dfrac{-3 \pm 5}{4} = -2, \dfrac{1}{2}$

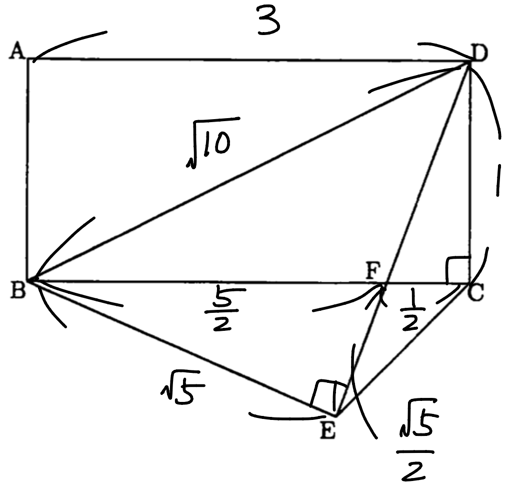
$x > 0$ より $x = \dfrac{1}{2}$

・$\triangle DBF = BF \times DC \times \dfrac{1}{2}$

$= (3 - x) \times 1 \times \dfrac{1}{2}$

$= \underline{\dfrac{5}{4}}$ //

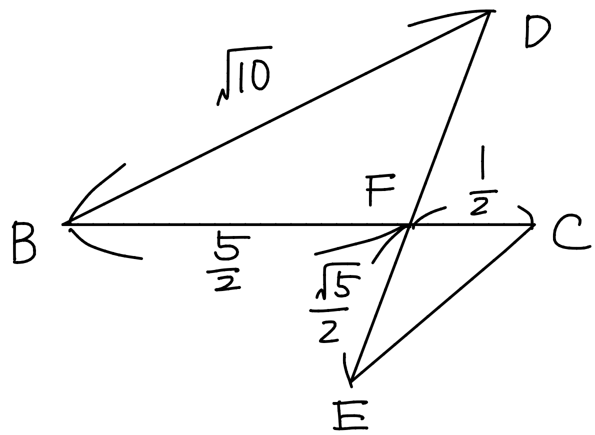
(3) ECの長さを求めよ。




$\angle BED = \angle BCD = 90°$ より
点E, C は, BDを直径とする
円周上の点 であることがわかる。

(1)(2) より 右のように
長さが決まる。

$DF = \sqrt{5}$ $FC = \frac{\sqrt{5}}{2}$




$\triangle DBF \backsim \triangle ECF$ より

$EC : DB = FC : FD$

$EC : \sqrt{10} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\frac{\sqrt{5}}{2} EC = \frac{\sqrt{10}}{2}$  $\underline{EC = \sqrt{2}}$ //

図１は水平な地面に真っ直ぐ立っている４つの壁に囲まれた長方形の形をした場所を上から見たものである。壁の長さはAB＝80㎝，BC＝50㎝ であった。地点Ｘに置いた球を何回か壁で跳ね返らせて，地点Ｙに到達させることを考える。壁での跳ね返りは図２のように入射角と反射角が等しくなるように跳ね返るものとする。また，跳ね返り以外では球は必ず直進するものとして，地点Ｙに到達するまでは止まることはない。球の大きさは無視できるものとして，次の各問いに答えよ。

⑴　AB上の地点Ｐで跳ね返らせる。その後，跳ね返ることなく，地点Ｙに到達させるためには，APを何㎝にすればよいか。

⑵　AB上の地点Ｑで跳ね返らせ，次にＢＣ上で跳ね返らせる。その後，跳ね返ることなく，地点Ｙに到達させるためには，AQを何㎝にすればよいか。

⑶　AB上の地点Ｒで跳ね返らせ，次にBC，CD，DA，ABの順で跳ね返らせる。その後，跳ね返ることなく，地点Ｙに到達させるためには，ARを何㎝にすればよいか。

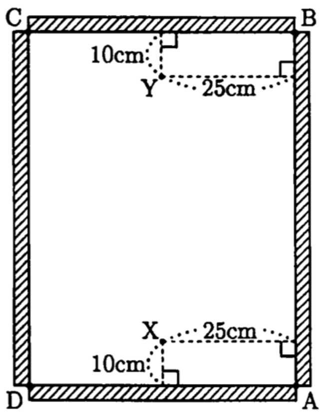


図１

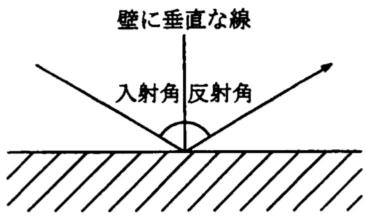
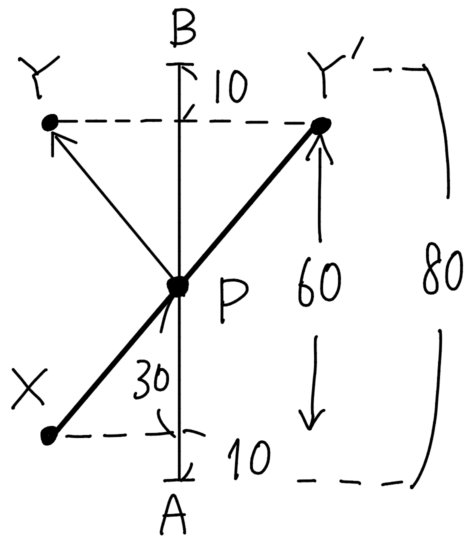


図２

⑴　AB上の地点Ｐで跳ね返らせる。その後，跳ね返ることなく，地点Ｙに到達させるためには，APを何㎝にすればよいか。

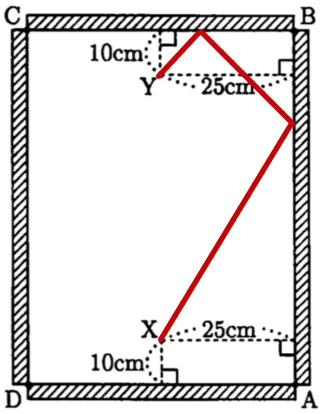


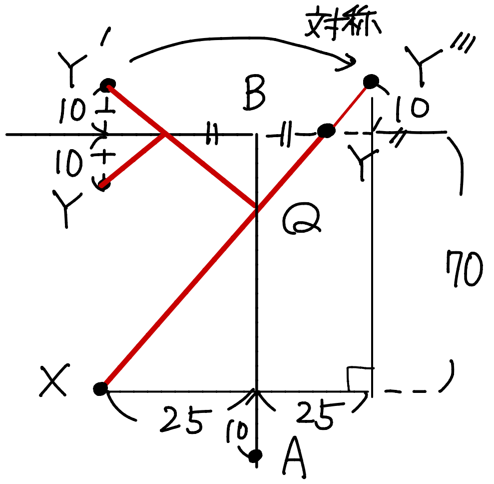

ABを対称の軸にして
Yと対称な点をY'とする。
XY'とABの交点が
ちょうどPになってYに
到達する点となる。

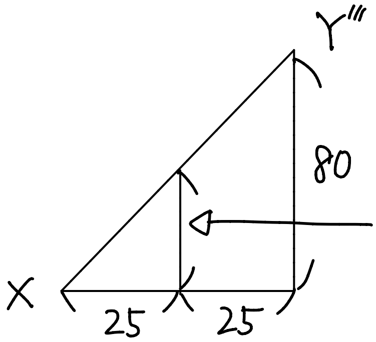
よって AP＝10＋30＝40 cm

(2) AB上の地点Qで跳ね返らせ，次にBC上で跳ね返らせる。その後，跳ね返ることなく，地点Yに到達させるためには，AQを何cmにすればよいか。

イメージ ―― の動き。



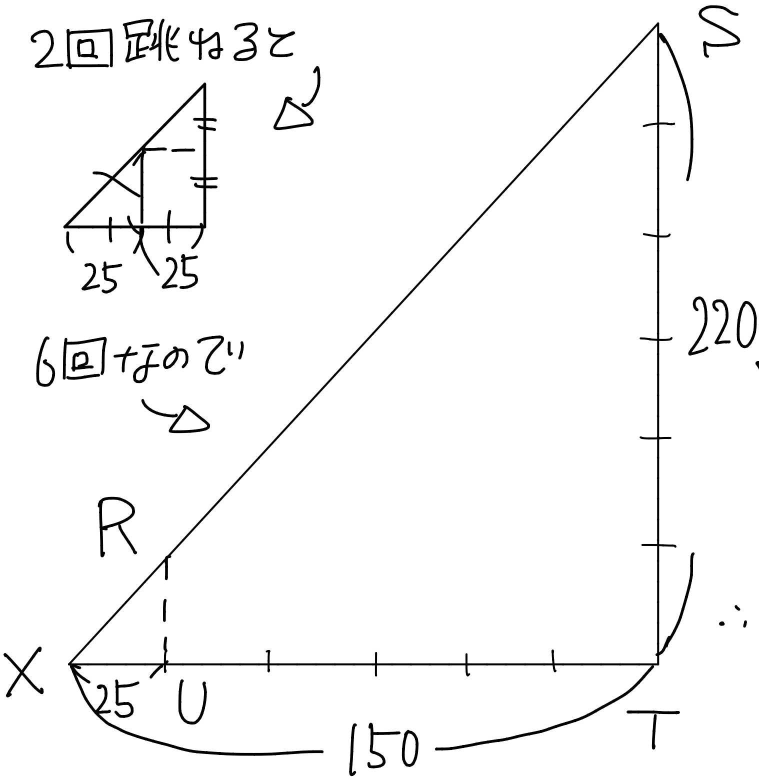




なので 40 となる。 AQ = 10 + 40 = 50 cm //

(3) AB上の地点Rで跳ね返らせ，次にBC，CD，DA，ABの順で跳ね返らせる。その後，跳ね返ることなく，地点Yに到達させるためには，ARを何cmにすればよいか。

2回跳ねると

6回なので

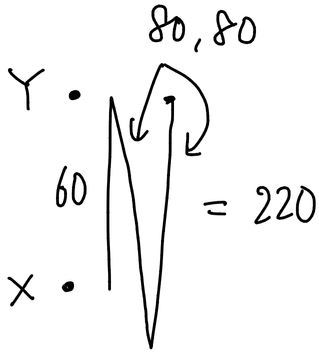



◎ $RU : ST = XU : XT$

$= 25 : 150$

$= 1 : 6$

◎ ST =




$\therefore RU = \dfrac{110}{3}$

$AR = \dfrac{110}{3} + 10 = \dfrac{140}{3}$ cm //

6.

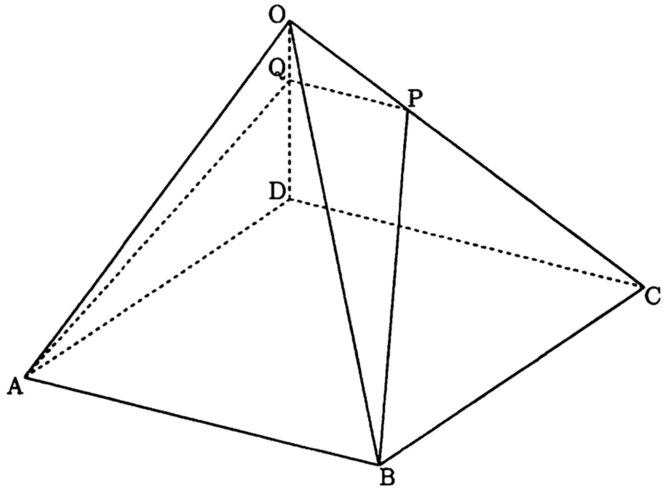
図のように，各辺の長さが１である正四角錐O - ABCDがある。この正四角錐を，辺ABを通る平面で切り，台形PQABを作った。OP$=\frac{1}{3}$のとき，次の各問いに答えよ。

(1) PBの長さを求めよ。

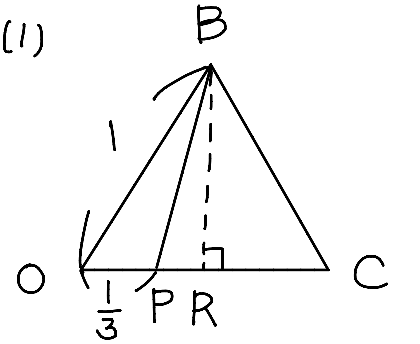
(2) 台形PQABの面積を求めよ。

(3) PQの中点をM，ABの中点をNとするとき，∠OMN＝90° であることを証明せよ。

(4) 四角錐O - ABPQの体積は，正四角錐O - ABCDの体積の何倍であるか求めよ。




(1)



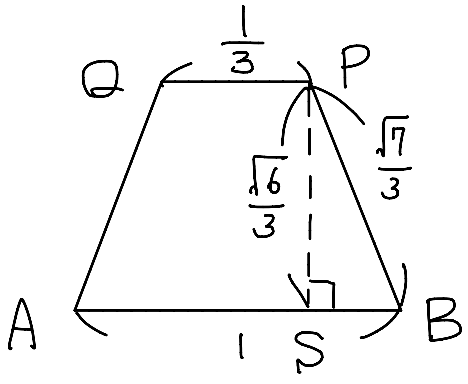

Bから OC への垂線を降ろすと，$OR = \frac{1}{2}$

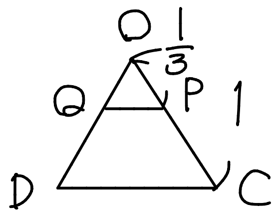
なので $PR = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$BR = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より △BPR で三平方の定理より

$PB = \sqrt{PR^2 + BR^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ //

(2) 台形PQABの面積を求めよ。




より $QP = \frac{1}{3}$

$QP = \frac{1}{3}$ より $SB = \frac{1}{3}$

$PS = \sqrt{PB^2 - SB^2}$

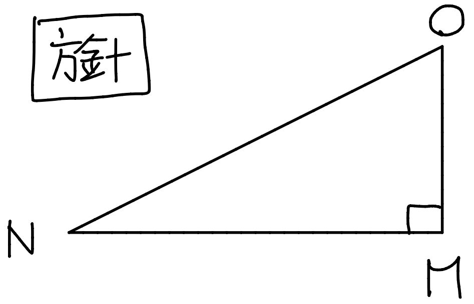
$= \sqrt{\frac{7}{9} - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

∴ 台形PQAB $= (QP + AB) \times PS \times \frac{1}{2}$

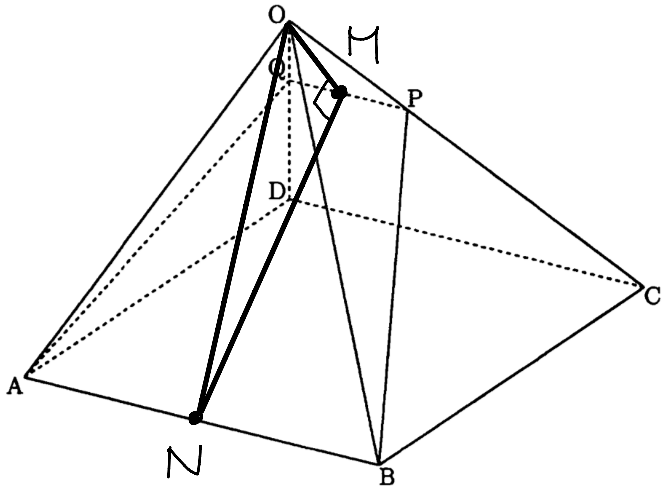
$= \left(\frac{1}{3} + 1\right) \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9}\sqrt{6}$ //

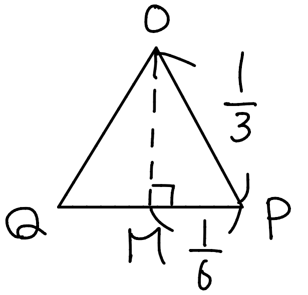
(3) PQの中点をM，ABの中点をNとするとき，∠OMN＝90° であることを証明せよ。

**方針**

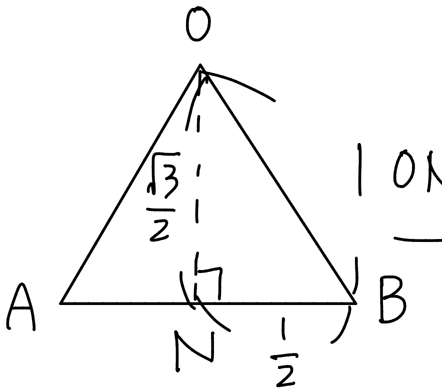



△OMNで三平方の定理が成り立てば、
∠OMN = 90°が示される。

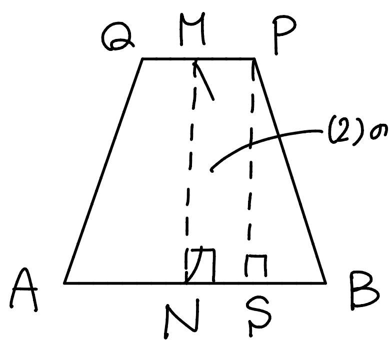



$OM = \frac{\sqrt{3}}{6}$




$ON = \frac{\sqrt{3}}{2}$




(2)のPSと同じなので

$MN = \frac{\sqrt{6}}{3}$

① $OM^2 + MN^2$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$

$= \frac{3}{36} + \frac{6}{9} = \frac{3+24}{36}$

$= \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

① $ON^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$ON^2 = OM^2 + MN^2$ となったので

$\angle OMN = 90°$

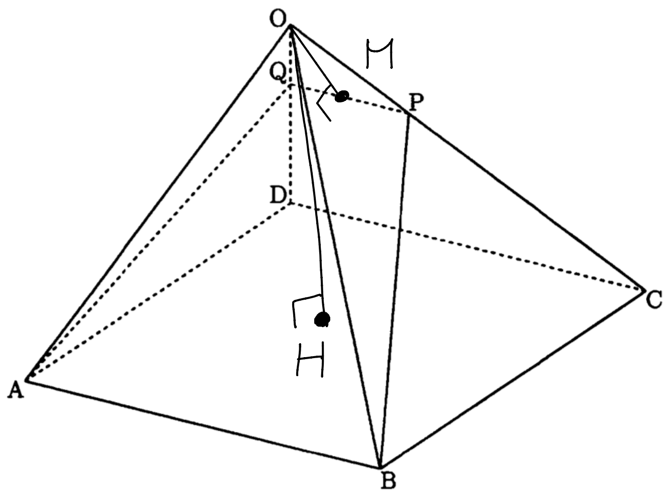
□

(4) 四角錐O- ABPQの体積は，正四角錐O- ABCDの体積の何倍であるか求めよ。

方針

(1)～(3) より 以下のように体積が求まる。

- O-ABPQ = 底面PQAB × 高さOM × $\frac{1}{3}$
- O-ABCD = 底面ABCD × 高さOH × $\frac{1}{3}$

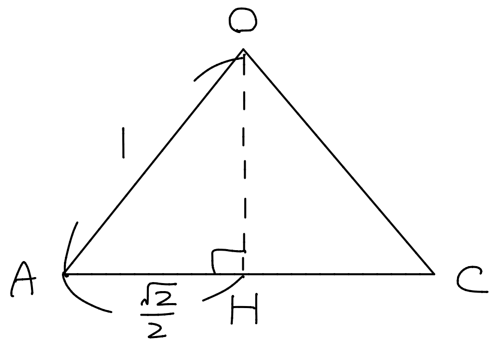



- O-ABPQ = 四角形PQAB × OM × $\frac{1}{3}$

何倍？ ↑ $= \frac{2\sqrt{6}}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{27}$

- O-ABCD = 四角形ABCD × OH × $\frac{1}{3}$

$= 1^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$




$AC = \sqrt{2}$ より $AH = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore OH = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{27} \div \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{27} \times \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{2}{9}$

$\frac{2}{9}$倍 //