高校入試過去問（　滝　）（R4）年数学

（１００点満点（60）分））

１．

(1) $\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{2}}-\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$ を計算せよ。

(2) $x^2-4y^2-8x+16$ を因数分解せよ。

(3) $4(x^2-2x+4)-2(x^2-x)=15-2x$ を解け。

(4)　図１のように，平行四辺形ABCDの辺BC上にBE：EC＝１：２となる点Ｅをとる。対角線BDとAE，ACとの交点をそれぞれＦ，Ｇとし，対角線ACとDEの交点をＨとする。このとき，面積比△AFG：△CDHを求めよ。

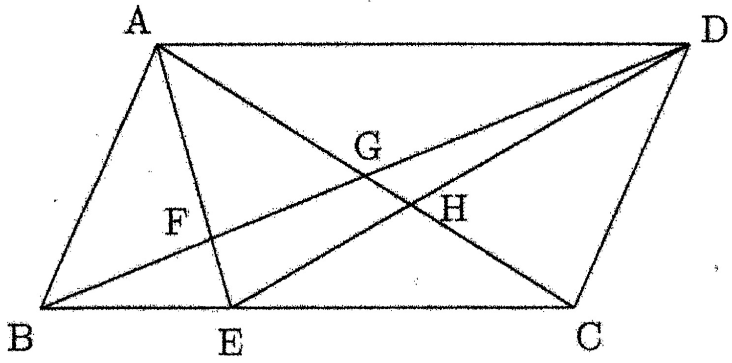


図１

(5) 図２のように，四角形ABCDは円に内接している。直線と円は点Cで接している。∠ABDの二等分線と∠ADBの二等分線の交点をＩとする。このとき，∠BIDの大きさを求めよ。

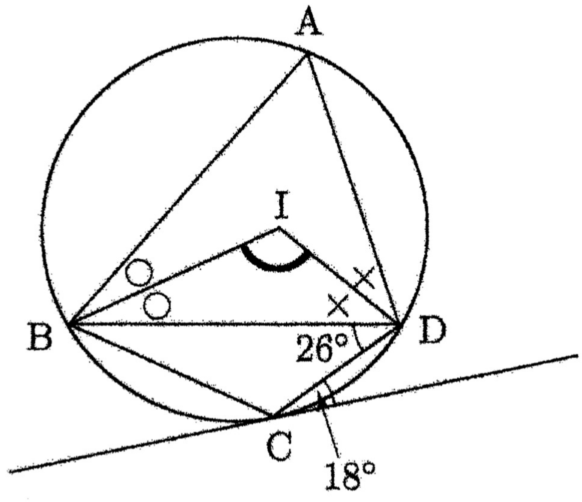


図 2

2.

　赤玉と白玉が合わせて150個あり，赤玉と白玉の総数の比は14：11である。これらすべてを3個ずつに分けて箱に入れたところ，赤玉1個と白玉2個が入っている箱と，赤玉3個が入っている箱の数が同じであった。また，赤玉2個と白玉1個が入っている箱の数は，白玉3個が入っている箱の数の4倍であった。赤玉3個が入っている箱の数を x，白玉3個が入っている箱の数を y とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) 箱の数について方程式を作ると，次のようになった。$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ にあてはまる正の整数を入れよ。

$$\boxed{\text{ア}}\,x+\boxed{\text{イ}}\,y=50$$

(2) x，y の値を求めよ。

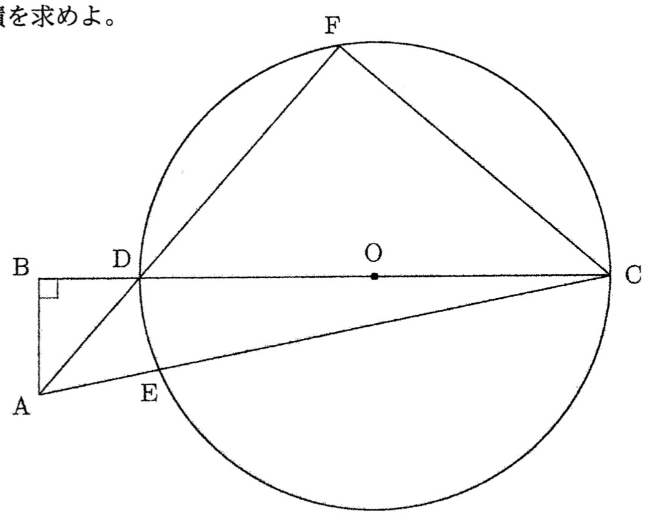
３.

∠ABC＝90°の直角三角形ABCがある。下図のように，BC上に点Dをとり，DCを直径とする円Oをつくる。直線CAと円の交点のうち，Cでない方をE，直線ADと円の交点のうち，Dでない方をFとする。OC＝3，AF＝6，CF＝$2\sqrt{5}$のとき，次の各問いに答えよ。

(1) DFの長さを求めよ。

(2) ABの長さを求めよ。

(3) △ADEの面積を求めよ。



4.

座標平面上に点A（1，1）があり，はじめ点PはAの位置にある。さいころを投げて，出た目が奇数のとき，点Pは今いる位置から目の数だけ x 軸の正の方向に進み，出た目が偶数のとき，点Pは今いる位置から目の数だけ y 軸の正の方向に進む。

さいころを2回続けて投げたとき，原点Oと点Pを頂点とし，x 軸，y 軸に平行な辺をもつ長方形を考える。

(1) 1回目に4の目が出て，2回目に5の目が出るとき，長方形の面積を求めよ。

(2) 1回目に2の目が出て，2回目に6の目が出るとき，長方形の面積を求めよ。

(3) 長方形の面積が素数になる可能性がある目の出方は，次の①～④のうちどれか。すべて選び，番号で答えよ。

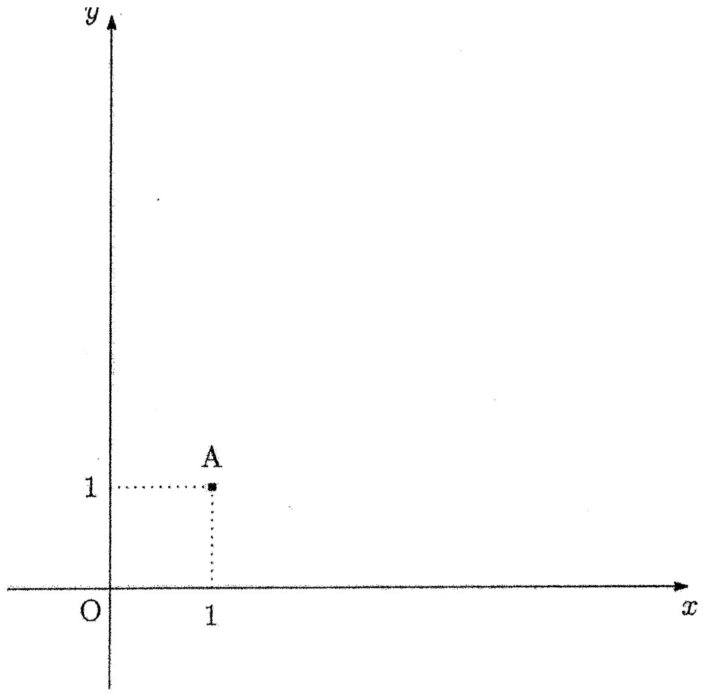
① 1回目に奇数の目が出て，2回目に奇数の目が出る

② 1回目に奇数の目が出て，2回目に偶数の目が出る

③ 1回目に偶数の目が出て，2回目に奇数の目が出る

④ 1回目に偶数の目が出て，2回目に偶数の目が出る

(4) 長方形の面積が12以上になる確率を求めよ。



5.

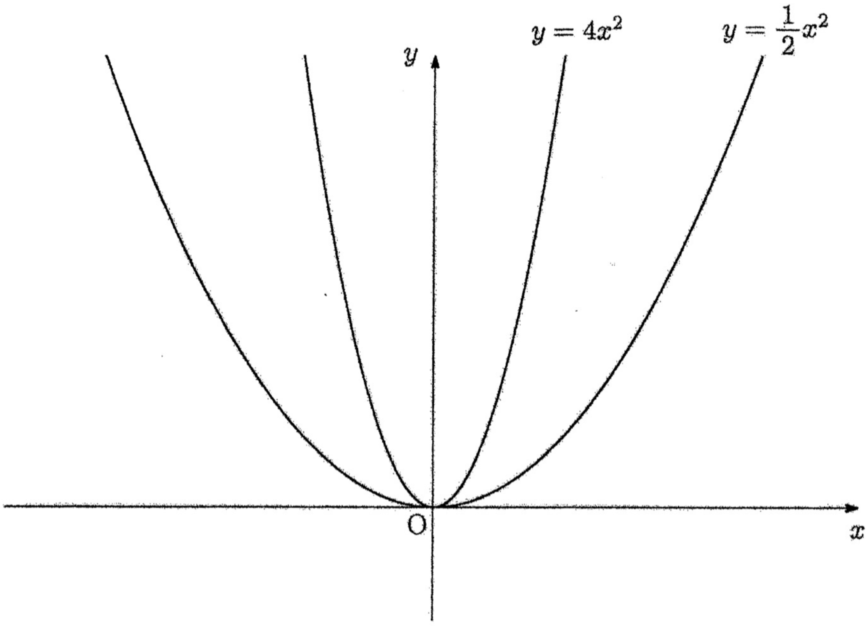
関数 $y=4x^2$ 上に2点A，Bがある。ただし，Aの x 座標は負，Bの x 座標は正である。また，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上に点Cがある。ただし，BとCの x 座標は等しい。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) Aの y 座標が16で，∠ABC＝90°であるときを考える。

(ア) △ABCの面積を求めよ。

(イ) 直線ACの式を求めよ。

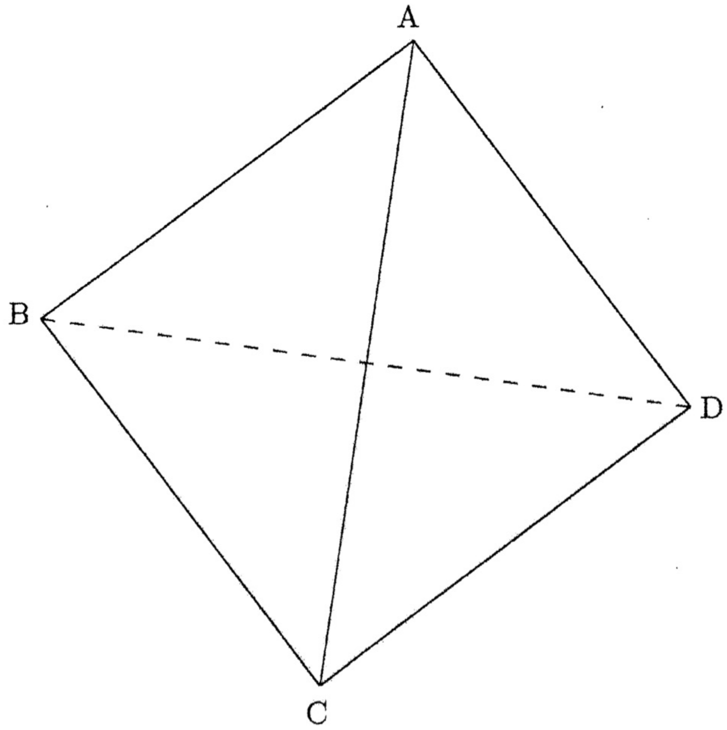
(2) Cの x 座標を t とする。△ABCが正三角形になるとき，t の値を求めよ。



６.

１辺の長さが４の正四面体ABCDにおいて，辺BCの中点をＥとする。
いま，辺CD上にEF＝$\sqrt{3}$となるように点Ｆをとる。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　AEおよびAFの長さを求めよ。
(2)　△AEFの面積を求めよ。
(3)　正四面体ABCDの高さを求めよ。
(4)　三角錐AGEFについて，△AEFを底面としたときの高さを求めよ。



高校入試過去問(　滝　)(R4)年数学

(100点満点(60)分))

1.

(1) $\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{2}}-\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$ を計算せよ。

$$= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} - \frac{6-2\sqrt{12}+2}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(4+2\sqrt{3})}{2} - \frac{\sqrt{2}(4-2\sqrt{3})}{2}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{2} - \frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{2} = \underline{2\sqrt{6}}\ /\!/$$

(別アプローチ)

▽着想

左・右の項の形が似ているので右の項で共通因数$\sqrt{2}$で整理したら楽になりそう。

$$\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{2}} - \frac{\cancel{2}(\sqrt{3}-1)^2}{\cancel{2}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{3}-1)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times 4\sqrt{3} = \underline{2\sqrt{6}}\ /\!/$$

(2) $x^2-4y^2-8x+16$ を因数分解せよ。

$$= (x^2-8x+16)-4y^2$$

$$= (x-4)^2-(2y)^2$$

$$= \{(x-4)+2y\}\{(x-4)-2y\}$$

$$= \underline{(x+2y-4)(x-2y-4)}\ /\!/$$

xとyに分けたら
2乗−2乗になりそうだ

x^2-4y^2 を $(x+2y)(x-2y)$ にしても手詰まりなので、「交換法則」で他の道を探す。

(3)　$4(x^2-2x+4)-2(x^2-x)=15-2x$ を解け。

$$4x^2-8x+16-2x^2+2x=15-2x$$

$$2x^2-4x+1=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\times2\times1}}{4}$$

$$x=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{4}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

//

---

(4)　図1のように，平行四辺形ABCDの辺BC上にBE：EC＝1：2となる点Eをとる。対角線BDとAE，ACとの交点をそれぞれF，Gとし，対角線ACとDEの交点をHとする。このとき，面積比△AFG：△CDHを求めよ。

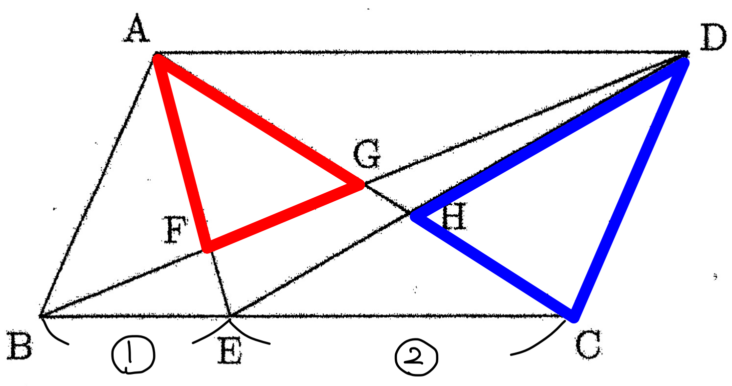
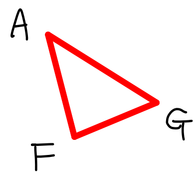
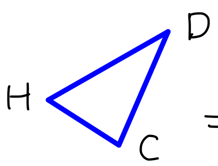


図1



$$=\underbrace{\text{平行四辺形}ABCD\times\frac{1}{2}}_{\triangle ABC\ (AC\text{で半分})}\times\underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\triangle ABG\\(AG\text{で半分})}}\times\underbrace{\frac{1}{2}}_{BF=FG}=\frac{1}{8}$$

平行四辺形の面積を1とすると



$$=\underbrace{\text{平行四辺形}ABCD\times\frac{1}{2}}_{\triangle ABC\ (AC\text{で半分})}\times\underbrace{\frac{2}{5}}_{AH:HC=3:2}=\frac{1}{5}$$

∴ △AFG：△CDH

＝ 5：8 //

板チョコをパキパキ割っていくイメージ！

(5) 図２のように，四角形ABCDは円に内接している。直線と円は点Cで接している。∠ABDの二等分線と∠ADBの二等分線の交点をＩとする。このとき，∠BIDの大きさを求めよ。

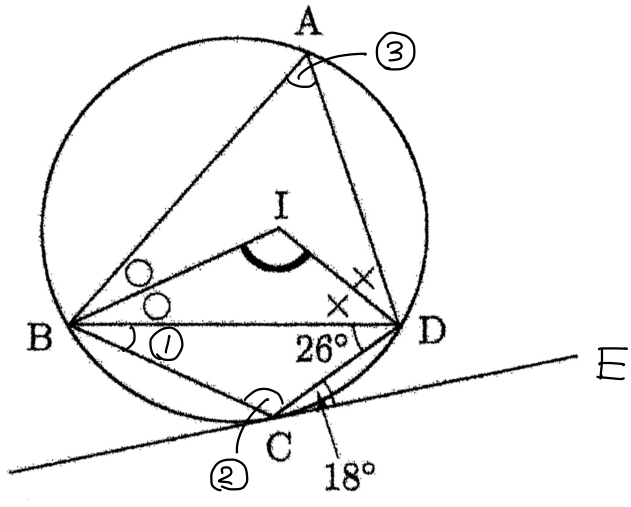


図 2

① 接弦定理より

$\angle CBD = \angle DCE = 18^\circ$

② $180^\circ - (18^\circ + 26^\circ) = 136^\circ$

③ 内接四角形の対角の和は 180° なので

$\angle BAD = 180^\circ - 136^\circ$
$= 44^\circ$

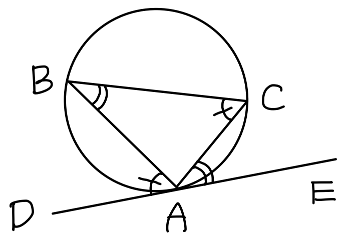
④ △ABDで

$2\bigcirc + 2\times + 44^\circ = 180^\circ \longrightarrow \bigcirc + \times = 68^\circ$

△IBDで

$\bigcirc + \times + \angle BID = 180^\circ$ ← 代入して $\angle BID = 112^\circ$ //

◎ 接弦定理

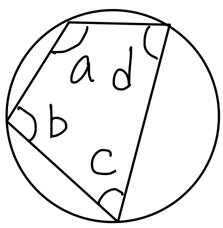


円に内接する三角形と接線について

$\angle BAD = \angle BCA$ （ ）

$\angle CAE = \angle CBA$ （ ）

◎ 内接四角形の対角の和 ＝ 180°



$\angle a + \angle c = 180^\circ$

$\angle b + \angle d = 180^\circ$

2.

赤玉と白玉が合わせて150個あり，赤玉と白玉の総数の比は14:11である。これらすべてを3個ずつに分けて箱に入れたところ，赤玉1個と白玉2個が入っている箱と，赤玉3個が入っている箱の数が同じであった。また，赤玉2個と白玉1個が入っている箱の数は，白玉3個が入っている箱の数の4倍であった。赤玉3個が入っている箱の数を x，白玉3個が入っている箱の数を y とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　箱の数について方程式を作ると，次のようになった。$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ にあてはまる正の整数を入れよ。

$$\boxed{ア}\,x+\boxed{イ}\,y=50$$

(2)　x，y の値を求めよ。

情報整理
図示（図に表す）
（印刷すると赤黒の区別がつきづらいので赤を ○ 白を △ で表した。

○○…○ ＋ △△…△ ＝ 150 …①
○○…○ ： △△…△ ＝ 14 ： 11 …②

x箱

$\boxed{○△△}$ の数 ＝ $\boxed{○○○}$ の数 …③
$\boxed{○○△}$ の数 ＝ $\boxed{△△△}$ の数 ×4 …④

y箱

③，④より ○ ＝ $x+3x+4y\times2=4x+8y$（個）
△ ＝ $2x+4y+3y=2x+7y$（個）

①，②に代入し

$$\begin{cases}(4x+8y)+(2x+7y)=150 & \cdots①'\\(4x+8y):(2x+7y)=14:11 & \cdots②'\end{cases}$$

①′… $6x+15y=150$
$2x+5y=50$　//(1)

②′… $14(2x+7y)=11(4x+8y)$
$28x+98y=44x+88y$
$16x-10y=0$
$8x=5y$

代入

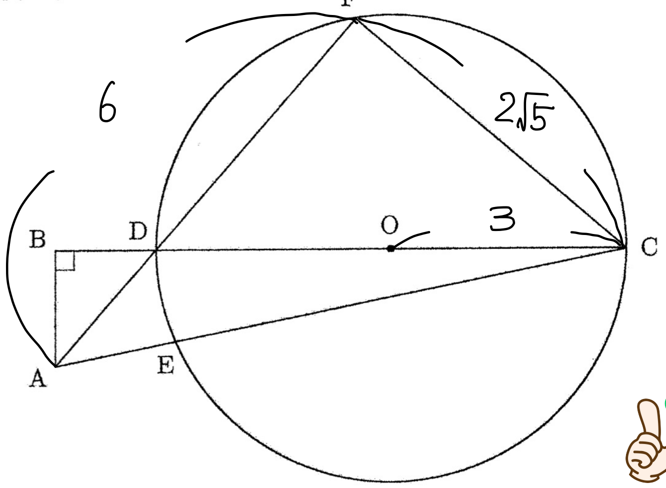
$2x+8x=50$
$10x=50$
$x=5$
$y=8$

$(x,y)=(5,8)$　//(2)

3.

∠ABC＝90°の直角三角形ABCがある。下図のように，BC上に点Dをとり，DCを直径とする円Oをつくる。直線CAと円の交点のうち，Cでない方をE，直線ADと円の交点のうち，Dでない方をFとする。OC＝3，AF＝6，CF＝$2\sqrt{5}$のとき，次の各問いに答えよ。

(1) DFの長さを求めよ。
(2) ABの長さを求めよ。
(3) △ADEの面積を求めよ。



(1) △FDCは、直径DCを含むので直角三角形であり三平方の定理より

$$DF^2 + FC^2 = DC^2$$
$$DF^2 + 20 = 36$$
$$\underline{DF = 4}$$

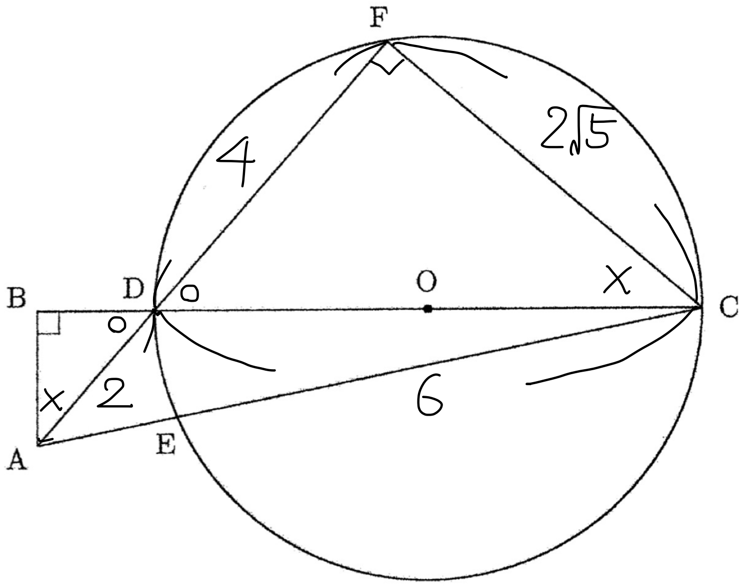
Point

円の問題は、等しくなる辺や90°の存在がカギとなりやすい!

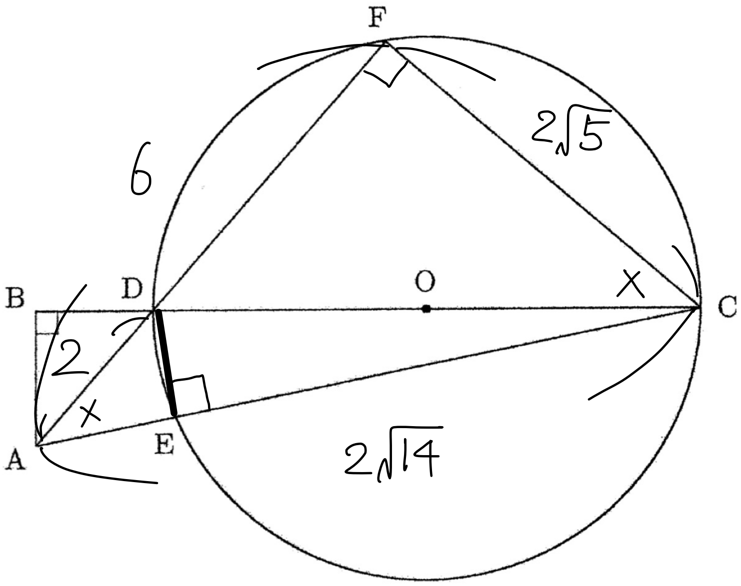
(2) (1)より DF＝4 より AD＝2 なので

△BAD ∽ △FCD
対応する辺の比は等しく

$$AB : CF = AD : DC$$
$$AB : 2\sqrt{5} = 4 : 6$$
$$\underline{AB = \frac{2\sqrt{5}}{3}}$$



(3) △ADEの面積を求めよ。

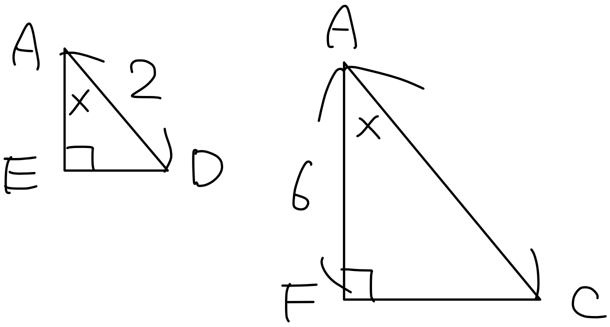


[1] △DECは直径DCを含むので、直角三角形。

$\angle DAE = \angle CAF$

$\angle AED = \angle AFC$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACF$



[2] 相似な三角形では、「面積比 = 相似比の2乗」

△AFCで三平方より

$$AC = \sqrt{AF^2 + FC^2} = \sqrt{36 + 20} = 2\sqrt{14}$$

$$\triangle ADE : \triangle ACF = AD^2 : AC^2$$

$$\triangle ADE : 6 \times 2\sqrt{5} \times \frac{1}{2} = 4 : 56$$

$$56\triangle ADE = 24\sqrt{5}$$

$$\triangle ADE = \frac{24\sqrt{5}}{56} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

Point

三角形の面積の求め方の選択肢を増やしておこう！ 今回は…。

「面積比 = 相似比の2乗」

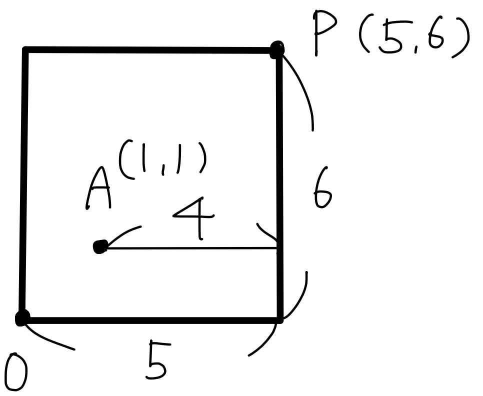
4.

座標平面上に点A（1，1）があり，はじめ点PはAの位置にある。さいころを投げて，出た目が奇数のとき，点Pは今いる位置から目の数だけ x 軸の正の方向に進み，出た目が偶数のとき，点Pは今いる位置から目の数だけ y 軸の正の方向に進む。

さいころを2回続けて投げたとき，原点Oと点Pを頂点とし，x 軸，y 軸に平行な辺をもつ長方形を考える。

(1)　1回目に4の目が出て，2回目に5の目が出るとき，長方形の面積を求めよ。
(2)　1回目に2の目が出て，2回目に6の目が出るとき，長方形の面積を求めよ。
(3)　長方形の面積が素数になる可能性がある目の出方は，次の①～④のうちどれか。すべて選び，番号で答えよ。
　①　1回目に奇数の目が出て，2回目に奇数の目が出る
　②　1回目に奇数の目が出て，2回目に偶数の目が出る
　③　1回目に偶数の目が出て，2回目に奇数の目が出る
　④　1回目に偶数の目が出て，2回目に偶数の目が出る
(4)　長方形の面積が12以上になる確率を求めよ。

(1)



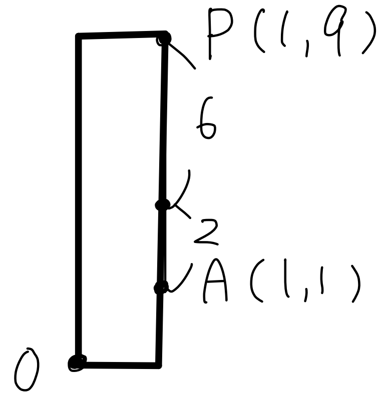
$5 \times 6 = \underline{30}$ //

(3) 点Pが $y=1$ 上にあるか $x=1$ 上にあると、面積が素数になる可能性がある。

2回とも偶数 または 2回とも奇数 でなければよい。

∴ $\underline{①, ④}$ //

(2)



$1 \times 9 = \underline{9}$ //

(4)

1回目＼2回目	1	2	3	4	5	6
1	(3,1)	(2,3)	(5,1)	(2,5)	(7,1)	(2,7)○
2	(2,3)	(1,5)	(4,3)○	(1,7)	(6,3)○	(1,9)
3	(5,1)	(4,3)○	(7,1)	(4,5)○	(9,1)	(4,7)○
4	(2,5)	(1,7)	(4,5)○	(1,9)	(6,5)○	(1,11)
5	(7,1)	(6,3)○	(9,1)	(6,5)○	(11,1)	(6,7)○
6	(2,7)○	(1,9)	(4,7)○	(1,11)	(6,7)○	(1,13)○

かけて12以上に ○ をつけた。

$\frac{15}{36} = \underline{\frac{5}{12}}$ //

5.

関数 $y=4x^2$ 上に 2 点A，Bがある。ただし，Aの x 座標は負，Bの x 座標は正である。また，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上に点Cがある。ただし，BとCの x 座標は等しい。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) Aの y 座標が16で，∠ABC=90°であるときを考える。

(ア) △ABCの面積を求めよ。

(イ) 直線ACの式を求めよ。

(2) Cの x 座標を t とする。△ABCが正三角形になるとき，t の値を求めよ。

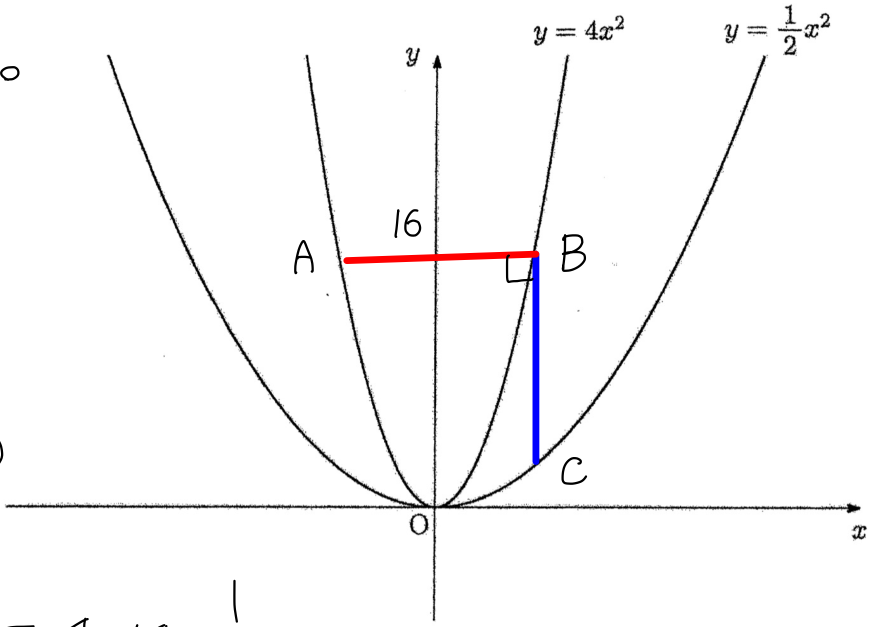
(1)

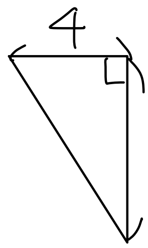
A, B, Cの座標を求める。

◎ $y=16$ を $y=4x^2$ に代入して

A$(-2, 16)$ B$(2, 16)$

◎ BとCの x 座標は等しいので $x=2$ を $y=\frac{1}{4}x^2$ に代入して C$(2, 2)$





$\triangle ABC = 4 \times 14 \times \frac{1}{2}$

$= 28$ //

(2) A$(-2, 16)$, C$(2, 2)$ なので

$y = \frac{2-16}{2-(-2)}x + b$

$(2, 2)$ を代入して

$2 = -7 + b \quad b = 9$

$\therefore$ AC : $y = -\frac{7}{2}x + 9$ //

$y - 16 = \frac{2-16}{2-(-2)}(x+2)$

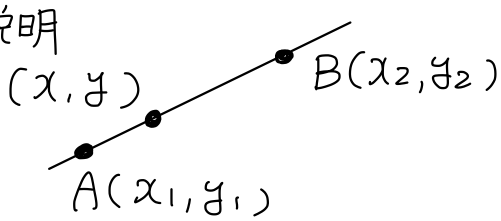
だと1行でいける。

重要

A(x_1, y_1) B(x_2, y_2) を通る直線の式

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

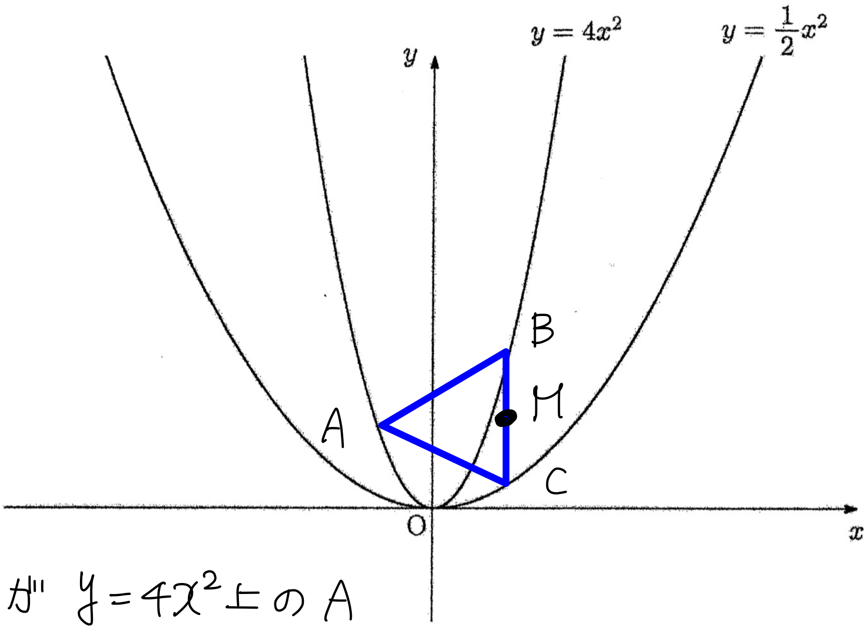
説明



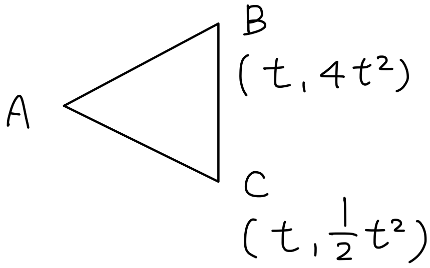
2点の傾きが等しい

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(2) Cの x 座標を t とする。△ABCが正三角形になるとき，t の値を求めよ。



1 完成系をイメージ



2 BCの中点Mのy座標がy=4x²上のA のy座標と等しくなるので方程式を作る。

$$\text{Mのy座標} = \left(4t^2 + \frac{1}{2}t^2\right) \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}t^2$$

$$4x^2 = \frac{9}{4}t^2$$

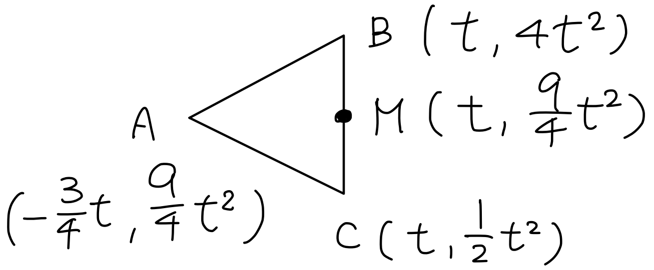
$$x^2 = \frac{9}{16}t^2$$

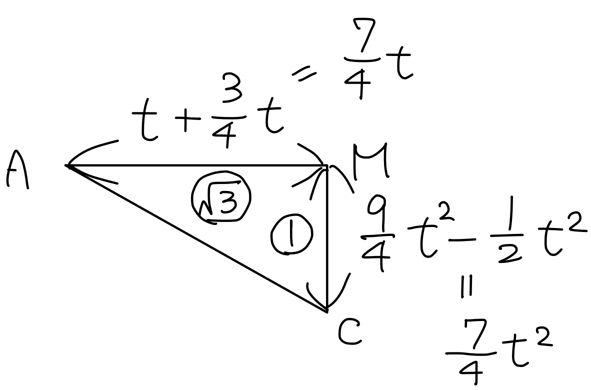
$$x = \pm\frac{3}{4}t$$

Aのx座標は負なので

$$x = -\frac{3}{4}t \qquad A\left(-\frac{3}{4}t, \frac{9}{4}t^2\right)$$

3 △ABCが正方形である条件を用いる。





△AMCは30°, 60°, 90°のなので

$$MC : AM = 1 : \sqrt{3}$$

$$\frac{7}{4}t^2 : \frac{7}{4}t = 1 : \sqrt{3}$$

$$t^2 : t = 1 : \sqrt{3}$$

$t \neq 0$ なので 左辺÷t

$$t : 1 = 1 : \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\,t = 1$$

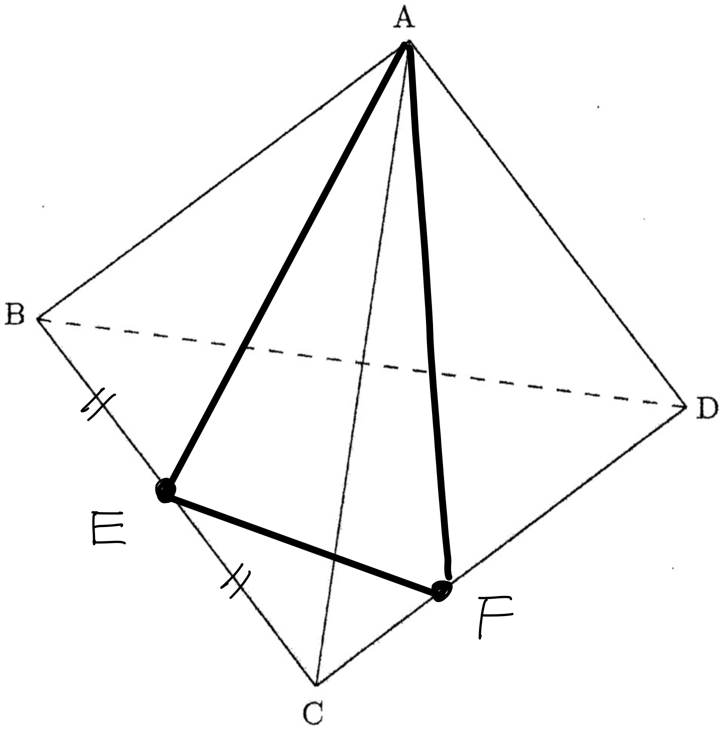
$$t = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

6.

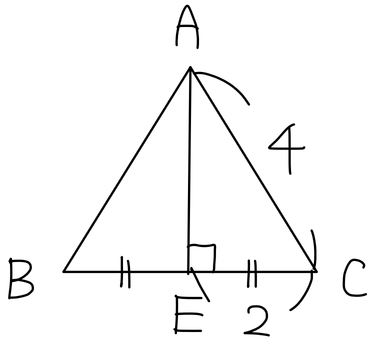
1辺の長さが4の正四面体ABCDにおいて，辺BCの中点をEとする。
いま，辺CD上に$EF=\sqrt{3}$となるように点Fをとる。このとき，次の各問いに答えよ。

(1)　AEおよびAFの長さを求めよ。
(2)　△AEFの面積を求めよ。
(3)　正四面体ABCDの高さを求めよ。
(4)　三角錐AGEFについて，△AEFを底面としたときの高さを求めよ。

(1)

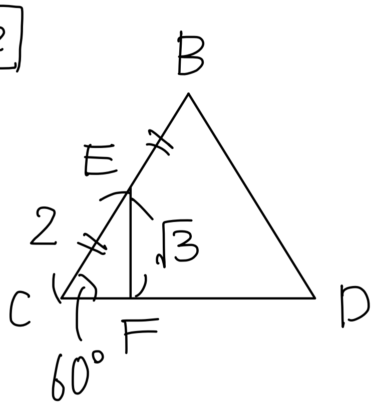


$\boxed{1}$



△AECは30°,60°,90°の直角三角形なので
$AE = 2\sqrt{3}$ //

$\boxed{2}$

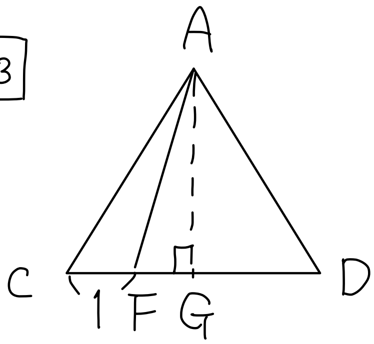


△ECFにおいて
$EC = 2$
$EF = \sqrt{3}$
$\angle C = 60°$ なので
$\angle EFC = 90°$ とわかる。
∴ $CF = 1$ となる。

Point

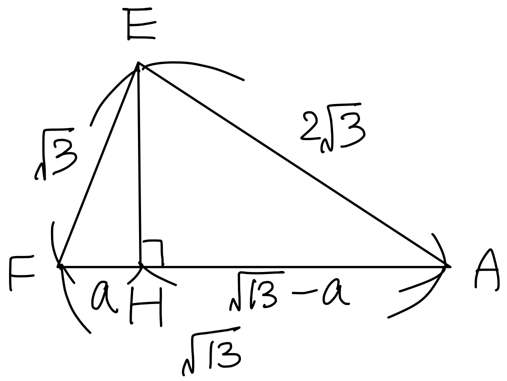
予測で進めることも必要!
$\boxed{2}$ の ∠EFC は、長さが求められる角度になるはずだ!!
60°とか 90° とか

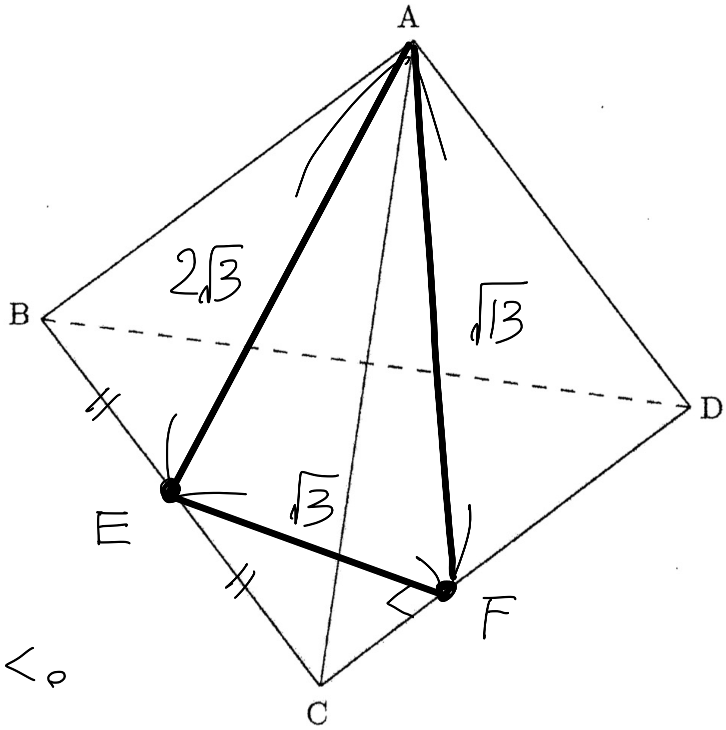
$\boxed{3}$



△AFGにおいて
$FG = 1$
$AG = AE = 2\sqrt{3}$
より $AF = \sqrt{13}$ //

(2)　△AEFの面積を求めよ。





△EFH の高さ
＝△EAH の高さ で解く。

$$EH = EH$$
$$EF^2 - FH^2 = EA^2 - HA^2$$
$$3 - a^2 = 12 - (\sqrt{13} - a)^2$$
$$0 = 9 - (13 - 2\sqrt{13}a)$$
$$2\sqrt{13}a = -4$$
$$a = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$EH = \sqrt{EF^2 - a^2}$$
$$= \sqrt{3 - \frac{4}{13}}$$
$$= \sqrt{\frac{35}{13}}$$

△AEF
$$= FA \times EH \times \frac{1}{2}$$
$$= \sqrt{13} \times \sqrt{\frac{35}{13}} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{35}}{2}$$

Point

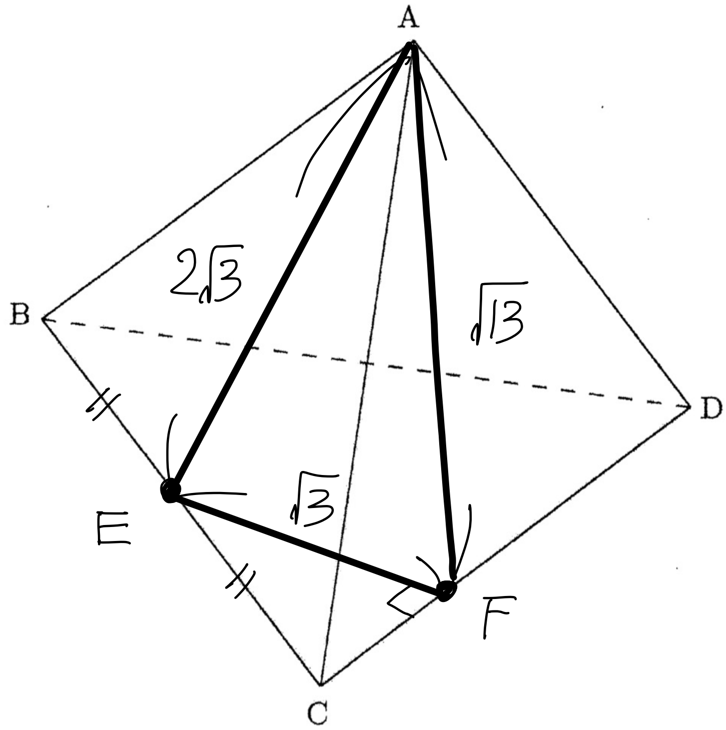
先にチェックしておくとよいこと。
もしかしたら「直角三角形」かもしれないので
三平方の定理 で試しておく！

$(\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2$　　$(\sqrt{13})^2$
$3 + 12 \neq 13$

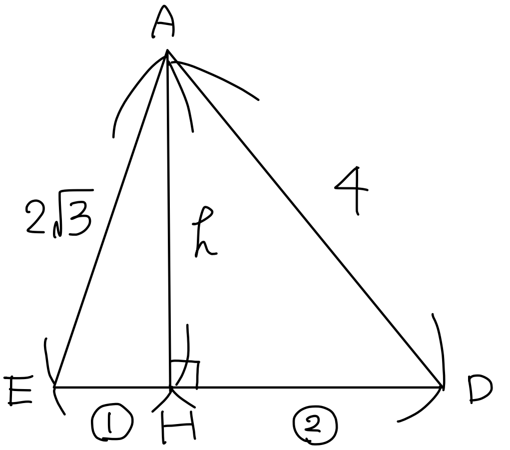
直角三角形ではない。

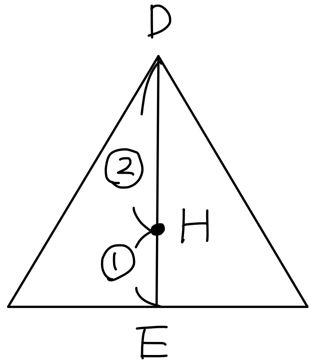
※ そんなラッキーなことはないですが…。

(3)　正四面体ABCDの高さを求めよ。



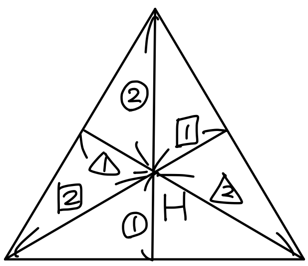
△AED に正四面体ABCDの
高さ h を示す。





頂点A から △BCD におろした垂線 と
△BCD の交点 を H とすると、
H は重心となり、DH：HE = 2：1
DE = AE = $2\sqrt{3}$　なので
HE = $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, DH = $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

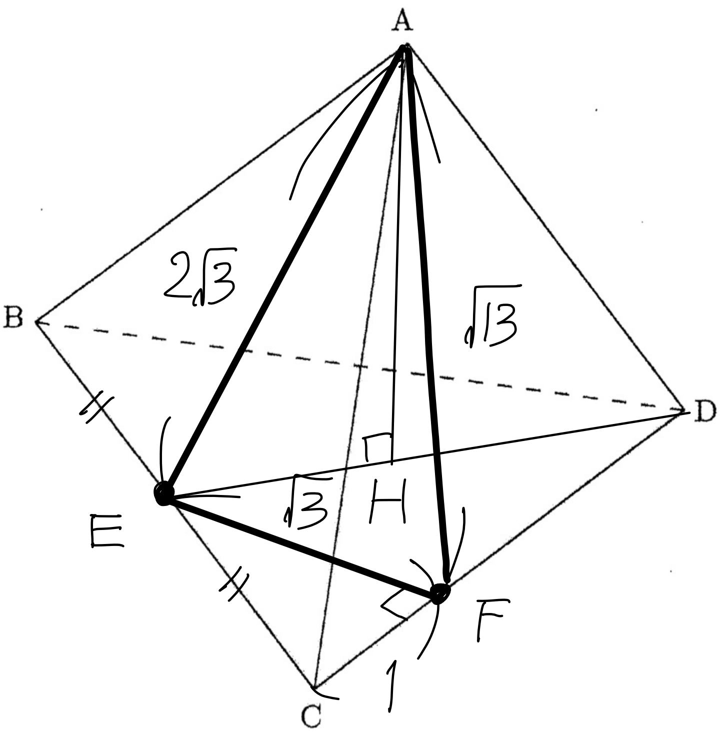
$$h = \sqrt{AE^2 - HE^2} = \sqrt{12 - \frac{4}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$



正四面体を上から見ると、
頂点 A からの高さ AH
の H の位置が
「重心」となる！
2：1 に内分する点。

(4) 三角錐AGEFについて，△AEFを底面としたときの高さを求めよ。

$$\triangle ECF = EF \times CF \times \frac{1}{2} = \sqrt{3} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



① 三角錐 A−EFCの体積

$$= \triangle ECF \times AH \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

② 三角錐 A−EFCの体積 $= \triangle AEF \times$ 求める高さ $h' \times \frac{1}{3}$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{35}}{2} \times h' \times \frac{1}{3}$$

$$h' = \frac{2 \times 2 \times 3 \times \sqrt{2}}{3\sqrt{35}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{35}} = \frac{4\sqrt{70}}{35}$$

Point

(4) のように，体積が２通り —— と —— で表されるので等しい。

この考えはよく使います。

今回のように，直接求めづらい高さを求める場合が多い！