（　愛知　）高等学校　H(29)数学

（１００点満点　（45）分）

１．次の問いに答えなさい。

---

1 次の各問に答えなさい。

(1) 方程式 $2^2 \times x - (-3)^2 = (-1)^{2017} + 4^2$ を解きなさい。

(2) $a = 8.4$，$b = 1.2$ のとき，式 $a^2 - 4ab + 4b^2$ の値を求めなさい。

(3) x と y は反比例の関係になっている。$x = 3$ のとき $y = 6$ である。$y = 12$ のときの x の値を求めなさい。

⑷　２次方程式 $x^2 - ax + 2a = 0$ の解がただ１つになるとき，a の値をすべて求めなさい。

⑸　２つのさいころＡ，Ｂを同時に投げるとき，Ａの出る目の数を a，Ｂの出る目の数を b とする。
このとき，式 $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ の値が有理数になる確率を求めなさい。

⑹　10人のテストの点数データが

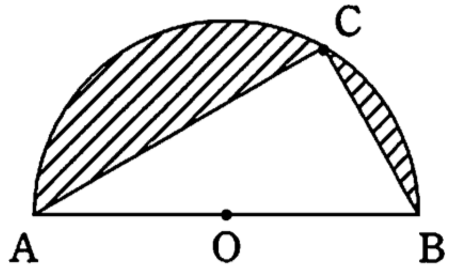
6，2，7，1，4，5，9，2，10，3（点）

である。このとき，データの中央値（メジアン）を求めなさい。

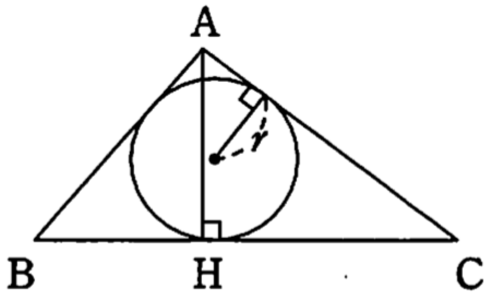
(7) 濃度a%の食塩水Aと，濃度b%の食塩水Bがある。AとBを 2：1 の割合で混ぜたところ濃度10%の食塩水Cができた。さらに，BとCを 2：3 の割合で混ぜたところ濃度８%の食塩水Dができた。このとき，a，bの値をそれぞれ求めなさい。

(8) ３桁の自然数のうちで，6，12，18のどれで割っても２余る最小の自然数を求めなさい。

(9) 右の図のように，ABを直径とする半円Oがある。半円周上に点Cをとると，$\overset{\frown}{AC} : \overset{\frown}{CB} = 2 : 1$ となった。AB＝2㎝のとき，斜線部分の面積を求めなさい。

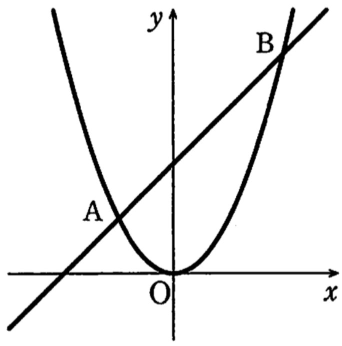


(10) 右の図のように，AB＝13㎝，AC＝15㎝ の三角形ABCにおいて，Aから辺BCに下ろした垂線をAHとするとAH＝12㎝である。この△ABCのすべての辺に接する円の半径 r ㎝を求めなさい。



２.

右の図のように，放物線 $y=x^2$ 上の２点A，Bの x 座標をそれぞれ $-\frac{1}{2}$，$\frac{7}{2}$ とする。このとき，次の問に答えなさい。



(1)　２点A，Bを通る直線の傾きを求めなさい。

(2)　△OABの面積を求めなさい。

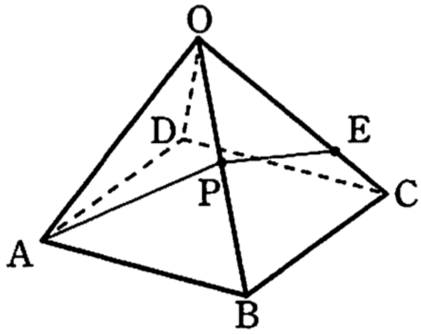
(3)　点Pは放物線 $y=x^2$ 上にあり，点Oとは異なる点で x 座標は $-\frac{1}{2}$ と $\frac{7}{2}$ の間の値とする。△OABの面積と△PABの面積が等しくなるとき，点Pの x 座標を求めなさい。

３.

　右の図のように，すべての辺の長さが２㎝の正四角錐Ｏ－ABCDがある。辺OC上に OE：EC＝３：１ となる点Ｅをとり，辺OB上に AP＋PE の長さが最も短くなるように点Ｐをとる。このとき，次の問に答えなさい。

⑴　AP：PE を最も簡単な整数比で答えなさい。

⑵　AP＋PE の長さを求めなさい。



4.

n を自然数とするとき，１から n までの自然数の積を $n!$ で表す。

（例）　$3! = 1 \times 2 \times 3$

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

このとき，次の問に答えなさい。

⑴　$6!$ を $2^a \times 3^b \times 5$ の形に表すと a，b の値はそれぞれいくつになるか答えなさい。ただし，a，b は自然数とする。

⑵　$25!$ を計算すると，末尾に０が連続していくつ並ぶか答えなさい。

⑶　$n!$ を計算すると，末尾に０が連続して15個のみ並ぶような最大の自然数 n を求めなさい。

(愛知)高等学校　H(29)数学

（１００点満点　（45 ）分）

１．次の問いに答えなさい。

Point 指数法則

- $(-a)^2=(-a)\times(-a)=a^2$
- $-a^2=-(a\times a)=-a^2$
- $(-1)^{偶数}=1$

$(-1)^{奇数}=-1$

1 次の各問に答えなさい。

(1) 方程式 $2^2\times x-(-3)^2=(-1)^{2017}+4^2$ を解きなさい。

$4\times4=16$

- $2\times2=4$
- $(-3)\times(-3)=9$
- $(-1)^{2017}$

2017 = 奇数

なので -1

$4x-9=-1+16$

$4x=24$

$x=6$ //

式を整理してから

値を代入すると速い。

- 整理…

① 同類項をまとめる

② 因数分解

して代入すると

楽になる式に

変形する。

(2) $a=8.4$，$b=1.2$ のとき，式 $a^2-4ab+4b^2$ の値を求めなさい。

$a^2-4ab+4b^2$

$=(a-2b)^2$

$=(8.4-2\times1.2)^2$

$=(8.4-2.4)^2=6^2$

$=36$ //

a^2-4a+4

$=(a-2)^2$

がヒント

Point 式の値

(3) xとyは反比例の関係になっている。$x=3$ のとき $y=6$ である。$y=12$ のときのxの値を求めなさい。

$y=\frac{a}{x}$ 代入　$6=\frac{a}{3}\rightarrow a=18$

よって $y=\frac{18}{x}$ となるので　$y=12$を代入

$12=\frac{18}{x}\xrightarrow[\div12]{\times x} x=\frac{\cancel{18}^{3}}{\cancel{12}_{2}}$

$x=\frac{3}{2}$ //

(4)　2次方程式 $x^2 - ax + 2a = 0$ の解がただ1つになるとき，a の値をすべて求めなさい。

因数分解できないので解の公式を用いる。

$$x = \frac{a \pm \sqrt{(-a)^2 - 4 \times 1 \times 2a}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8a}}{2}$$

$\sqrt{a^2 - 8a} = 0$ になればよい。

両辺2乗

$a^2 - 8a = 0$

$a(a-8) = 0$

$a = 0, 8$

Point　2次方程式の解がただ1つ

⇩

$(x-a)^2 = 0$

に変形できる

(5)　2つのさいころA，Bを同時に投げるとき，Aの出る目の数を a，Bの出る目の数を b とする。このとき，式 $\sqrt{\frac{b}{a}}$ の値が有理数になる確率を求めなさい。

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	$\sqrt{\frac{1}{1}}=1$	$\sqrt{\frac{2}{1}}=\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{3}{1}}=\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{4}{1}}=2$	$\sqrt{\frac{5}{1}}=\sqrt{5}$	$\sqrt{\frac{6}{1}}=\sqrt{6}$
2	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}=1$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{4}{2}}=\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\sqrt{\frac{6}{2}}=\sqrt{3}$
3	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{3}{3}}=1$	$\sqrt{\frac{4}{3}}$	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	$\sqrt{\frac{6}{3}}=\sqrt{2}$
4	$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}=1$	$\sqrt{\frac{5}{4}}$	$\sqrt{\frac{6}{4}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$
5	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{4}{5}}$	$\sqrt{\frac{5}{5}}=1$	$\sqrt{\frac{6}{5}}$
6	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{2}{6}}=\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{3}{6}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{4}{6}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{4}{6}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{6}{6}}=1$

表を用いて全て書き出して解く流れ

$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

（別アプローチ）

しぼりこみ

$\frac{1}{6} \leqq \frac{b}{a} \leqq 6$

$\sqrt{\frac{b}{a}}$ が有理数なので

その中で平方数は

$\frac{b}{a} = \frac{1^2}{2^2}, 1^2, 2^2$

$= \frac{1}{4}, 1, 4$ となる

a.bの組み合わせは左の○の8通りである。

(6)　10人のテストの点数データが

~~6~~，~~2~~，~~7~~，~~1~~，~~4~~，~~5~~，9，~~2~~，10，~~3~~（点）

である。このとき，データの中央値（メジアン）を求めなさい。

小さい順に並びかえると，

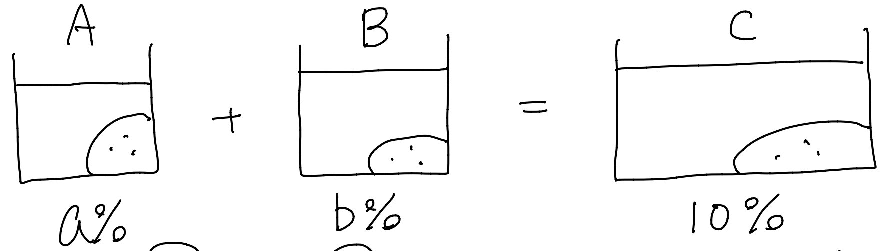
1, 2, 2, 3, $\boxed{4, 5}$, 6, 7, 9, 10

10人のデータの中央 $= \frac{10}{2} = 5$

よって5, 6番目の数の平均値

$\frac{4+5}{2} = 4.5$ 点

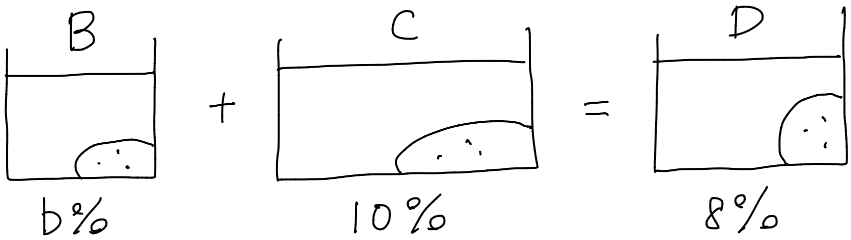
(7)　濃度 a %の食塩水Aと，濃度 b %の食塩水Bがある。AとBを 2：1 の割合で混ぜたところ濃度10%の食塩水Cができた。さらに，BとCを 2：3 の割合で混ぜたところ濃度8%の食塩水Dができた。このとき，a，b の値をそれぞれ求めなさい。



2 : 1

$2x$ g　x g

$$2x \times \frac{a}{100} + x \times \frac{b}{100} = 3x \times \frac{10}{100}$$



$\boxed{2}$: $\boxed{3}$

$2y$ g　$3y$ g

$$2y \times \frac{b}{100} + 3y \times \frac{10}{100} = 5y \times \frac{8}{100}$$

$$\begin{cases} 2x \times \frac{a}{100} + x \times \frac{b}{100} = 3x \times \frac{10}{100} \\ 2y \times \frac{b}{100} + 3y \times \frac{10}{100} = 5y \times \frac{8}{100} \end{cases}$$

÷ x

÷ y

$$\begin{cases} 2a + b = 30 \\ 2a + 30 = 40 \end{cases}$$

$(a, b) = (12.5, 5)$ //

(8)　3桁の自然数のうちで，6，12，18のどれで割っても2余る最小の自然数を求めなさい。

$6 = 2 \times 3$ ，$12 = 2^2 \times 3$ ，$18 = 2 \times 3^2$

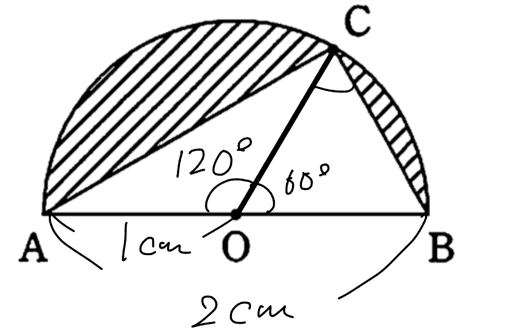
これらの数 どれでも割れるので 最小の自然数に $2^2 \times 3^2$ が含まれる。

$2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$ しかし 3桁ではないので

何をかけるか考えると $36 \times 3 = 108$

2余るためには $108 + 2 = 110$ //

(9) 右の図のように，ABを直径とする半円Oがある。半円周上に点Cをとると，$\overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{CB}=2:1$ となった。AB＝2㎝のとき，斜線部分の面積を求めなさい。



• $\overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{CB}=2:1$ なので中心角

$\angle AOC:\angle COB=2:1$ となる。

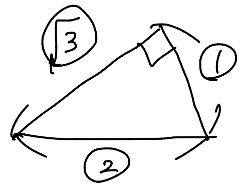
$\angle AOC=180\times\frac{2}{3}=120°$

$\angle COB=180\times\frac{1}{3}=60°$

• △COB … 60°の正三角形

△AOC … 底角30°の二等辺三角形

以上から



① の直角三角形となる。

AB＝2cm より

CB＝1cm, AC＝$\sqrt{3}$ cm

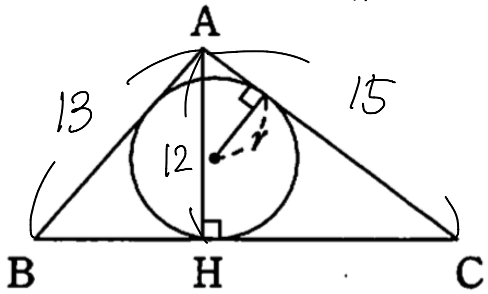
$\triangle ABC=1\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm²

半円 $=1\times1\times\pi\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$ cm²

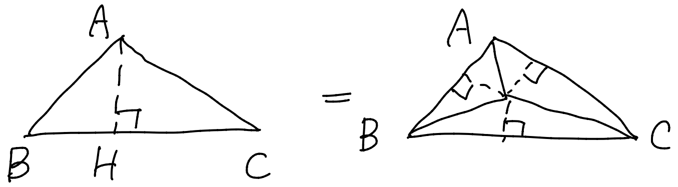
よって求める面積 ＝

$\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm²

(10) 右の図のように，AB＝13㎝，AC＝15㎝ の三角形ABCにおいて，Aから辺BCに下ろした垂線をAHとするとAH＝12㎝である。この△ABCのすべての辺に接する円の半径 r ㎝を求めなさい。



△ABC の面積が 2通りの表し方で等しいことを等式に表す。



$BC\times AH\times\frac{1}{2}=AC\times r\times\frac{1}{2}+AB\times r\times\frac{1}{2}+BC\times r\times\frac{1}{2}$

$BC=BH+HC$

$BH=\sqrt{13^2-12^2}=5$

$HC=\sqrt{15^2-12^2}=9$

よって $BC=5+9=14$ cm

$14\times12\times\frac{1}{2}=15\times r\times\frac{1}{2}+13\times r\times\frac{1}{2}+14\times r\times\frac{1}{2}$

解くと $r=4$

4cm

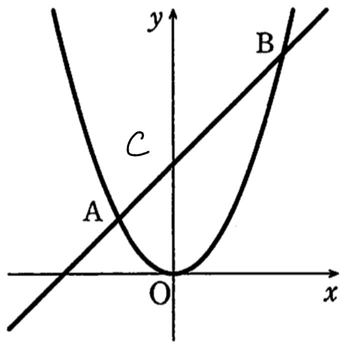
2.

右の図のように，放物線 $y=x^2$ 上の２点A，Bの x 座標をそれぞれ $-\frac{1}{2}$，$\frac{7}{2}$ とする。このとき，次の問に答えなさい。

(1)　２点A，Bを通る直線の傾きを求めなさい。

(2)　△OABの面積を求めなさい。

(3)　点Pは放物線 $y=x^2$ 上にあり，点Oとは異なる点で x 座標は $-\frac{1}{2}$ と $\frac{7}{2}$ の間の値とする。△OABの面積と△PABの面積が等しくなるとき，点Pの x 座標を求めなさい。



(1)　A，Bの座標を求める。

- $y=x^2$ に $x=-\frac{1}{2}$ を代入すれば Aの y が求まり　$y=\frac{1}{4}$　$A\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$

　$x=\frac{7}{2}$　〃　Bの　〃　$y=\frac{49}{4}$　$B\left(\frac{7}{2},\frac{49}{4}\right)$

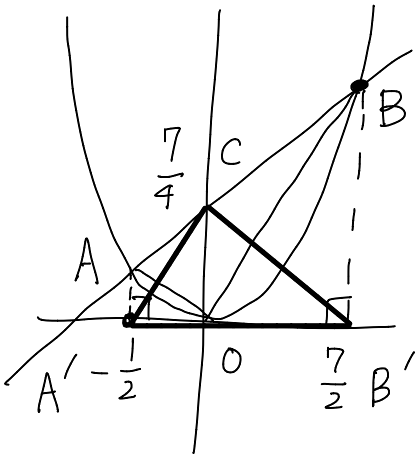
- ABの傾き $=\dfrac{\frac{49}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{7}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{48}{16}=\underline{3}$ //

---

(2)

AB：$y=3x+b$ で $A\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ を通るので $\frac{1}{4}=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+b$

$b=\frac{7}{4}$ → $y=3x+\frac{7}{4}$ よりABの切片の座標 $C\left(0,\frac{7}{4}\right)$



等積変形

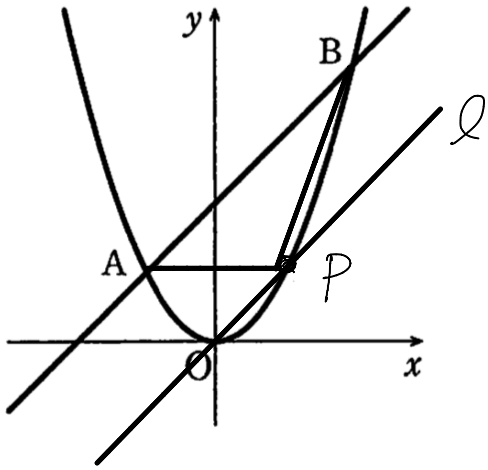
$\triangle OAB=\triangle A'CB'$

$=A'B'\times OC\times\frac{1}{2}$

$=\left(\frac{7}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\times\frac{7}{4}\times\frac{1}{2}$

$=\underline{\frac{7}{2}}$ //

(3) 点Pは放物線 $y=x^2$ 上にあり，点Oとは異なる点でx座標は$-\frac{1}{2}$と$\frac{7}{2}$の間の値とする。△OABの面積と△PABの面積が等しくなるとき，点Pのx座標を求めなさい。



流れ

△OAB ＝ △PAB を等積変形で考えると AB が固定されているので AB を底辺，頂点O を AB に平行な直線上を移動させ，P をつくる。

Pは ABに平行で原点を通る直線ℓと $y=x^2$の交点である。ABは傾き3なので

ℓ: $y=3x$ と $y=x^2$ の連立方程式でPを求める。

$$\begin{cases} y=3x \quad \cdots ① \\ y=x^2 \quad \cdots ② \end{cases}$$

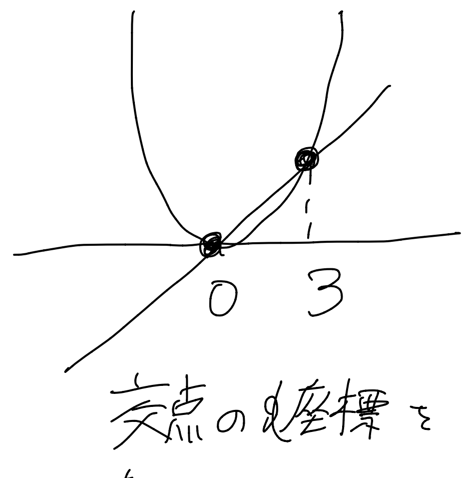
代入法

$x^2=3x$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$x=0,\ 3$



交点のx座標を表している。

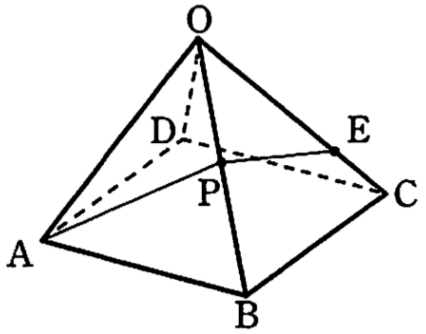
よって P(3, 9)

3.

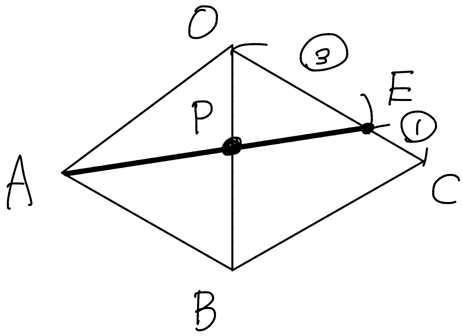
右の図のように，すべての辺の長さが２cmの正四角錐Ｏ－ABCDがある。辺OC上に OE：EC＝３：１ となる点Ｅをとり，辺OB上に AP＋PE の長さが最も短くなるように点Ｐをとる。このとき，次の問に答えなさい。

(1) AP：PE を最も簡単な整数比で答えなさい。

(2) AP＋PE の長さを求めなさい。



(1) 対象となる線分が入る平面で考える。正四角錐なので側面の1つは正三角形となる。



AP：PEが関わる相似な図形は

△APB ∽ △EPO

相似比を考えると OE：EC＝3：1

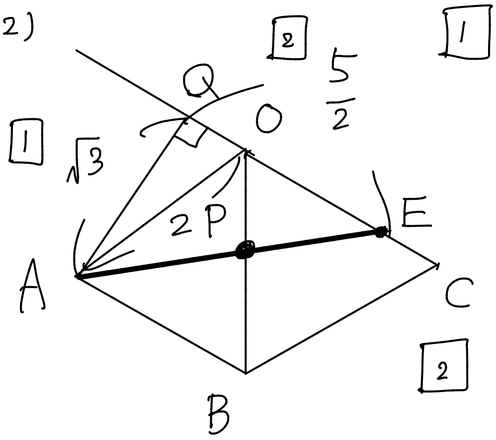
より OC＝4＝AB なので

OE：BA＝3：4＝PE：AP

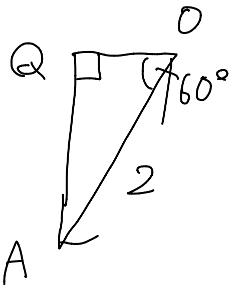
以上より AP：PE＝4：3

---

(2)



1 △QOA は



なので

$OQ = 1$

$OA = \sqrt{3}$

2 $OE = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$ なので

$QE = OE + OQ = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$

$AP + PE = AE$

AEは△AQEの三平方の定理より

$AE = \sqrt{AQ^2 + QE^2} = \sqrt{3 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$ cm

4.

n を自然数とするとき，1から n までの自然数の積を $n!$ で表す。

（例） $3! = 1 \times 2 \times 3$

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

このとき，次の問に答えなさい。

(1) $6!$ を $2^a \times 3^b \times 5$ の形に表すと a, b の値はそれぞれいくつになるか答えなさい。ただし，a, b は自然数とする。

(2) $25!$ を計算すると，末尾に0が連続していくつ並ぶか答えなさい。

(3) $n!$ を計算すると，末尾に0が連続して15個のみ並ぶような最大の自然数 n を求めなさい。

(1) $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

$= 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times 2 \times 3$

$= 2^4 \times 3^2 \times 5$

$a = 4,\ b = 2$ //

---

(2) 例えば

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2400 \\ 2 & 1200 \\ 2 & 600 \\ 3 & 300 \\ 2 & 100 \\ 5 & 50 \\ 5 & 10 \\ & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 130 \\ 5 & 65 \\ & 13 \end{array}$$

のように「5」がいくつかけられているかで 0がいくつ並ぶかがわかる。

5が2回なので 0も2つ

1回 〃 〃 1つ

$25! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 24 \times 25$

5を因数にする数は

5, 10, 15, 20, 25

1×5　2×5　3×5　4×5　5×5

よって5が6回かけられているので

0が6つ連続して並ぶ //

これらを含めて

---

(3) (2)と同様に考えると

30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65

5×6　5×7　5×8　5×9　$5^2 \times 10$　5×11　5×12　5×13

5は 15コ

70!だと5は16コなのでその手前 69!

よって $n = 69$ //